EXCEL

aplicaciones en álgebra, estadística, probabilidad y física

José Gerardo Cardona T.
Luz María Rojas Duque
Fernando Mesa

ECOE EDICIONES

JOSÉ GERARDO CARDONA T.

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad Tecnológica de Pereira, Magister y Especialización en Instrumentación Física, Maestría en Investigación operativa y estadística. Ha sido docente en la Universidad Católica Popular de Risaralda y Universidad Libre de Colombia (Pereira); actualmente docente en pregrado y maestría en la Universidad Tecnológica de Pereira.

Autor de: Matemáticas básicas para la salud (Pereira, 2006), además de una numerosa producción de artículos investigativos publicados en la Academia.

LUZ MARÍA ROJAS DUQUE

Licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad Tecnológica de Pereira, Especialista en Informática Educativa, Universidad Cooperativa de Colombia y Pedagogía en docencia universitaria, Universidad La Gran Colombia; Magister en Maestría en matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira. Docente de varias universidades, actualmente en pregrado y especialización de la Fundación Universitaria del Área Andina.

Autora de: Matemáticas básicas para la salud (Postergraph, Pereira, 2006); creación de software y artículos investigativos.

FERNANDO MESA

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad Tecnológica de Pereira, Especialista en Docencia Universitaria, Universidad Cooperativa de Colombia y Magister en Maestría en Instrumentación Física, Universidad Tecnológica de Pereira. Docente de las Universidades Tecnológica de Pereira y Cooperativa de Colombia Pereira.

Autor de: Ecuaciones diferenciales, un enfoque modelado, Introducción a la teoría de las funciones de variable compleja, (2007); Álgebra lineal con aplicaciones, (2006) con Postergraph, Pereira; y Estadística inferencial aplicada al medio ambiente (Publicaciones Universidad Cooperativa, 1998). Desarrollo de programas software y autor de numerosos artículos publicados en periódicos.

EXCEL

aplicaciones en álgebra, estadística, probabilidad y física

José Gerardo Cardona T.
Luz María Rojas D.
Fernando Mesa

Cardona, José Gerardo
Excel : aplicaciones en álgebra, estadística, probabilidad y física / José Gerardo Cardona, Luz María Rojas, Fernando Mesa. -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2008.
134 p. : il. ; 24 cm.
ISBN 978-958-648-568-5
1. Excel (Programa para computador) 2. Álgebra - Enseñanza con ayuda de computadores 3. Estadística - Enseñanza con ayuda de computadores 4. Física - Enseñanza con ayuda de computadores I. Rojas, Luz María II. Mesa, Fernando III. Tít.
005.3 cd 21 ed.
A1187195

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Colección: ciencias exactas
Área: educación - matemáticas
Primera edición: Bogotá, D.C., octubre de 2008
ISBN: 978-958-648-568-5

Coordinación editorial: Adriana Gutiérrez M.
Autoedición: Magda Rocío Barrero
Carátula: Magda Rocío Barrero
Fotolito: Imagen Gráfica Ltda.
Impresión: Alternativa Gráfica
Carrera 64A No. 4B-73

Impreso y hecho en Colombia

“Cuando por los años no puedas correr, trota.
Cuando no puedas trotar, camina.
Cuando no puedas caminar, usa el bastón.
¡Pero nunca te detengas!"

Madre Teresa

Dedicado a:

A mi esposa Lina y mis hijos Tatiana y Santiago

Nuestros padres: Ariel Cardona y Carmen Toro de C
Myriam Duque y Octavio Rojas

Nuestras hijas: María Alejandra Cardona R. y
Laura Catalina Cardona R.

Contenido

Presentación

La matemática, la estadística y la física no pueden estar al margen del avance tecnológico y el desarrollo de la informática, por ello no es posible que hoy se niegue a los estudiantes hacer uso de la calculadora y mucho menos del computador como medio para comprobar resultados y realizar estudios estadísticos.

En el texto, EXCEL, APLICACIONES EN ÁLGEBRA, ESTADÍSTICA, PROBABILIDAD Y FÍSICA, se abordarán una serie de problemas sencillos y de rutina de matemáticas, estadística, probabilidad y física, los cuales tanto el docente como el estudiante podrán resolver mediante las bondades de la hoja de cálculo EXCEL, la cual usará como medio de prueba para procedimientos manuales.

El objetivo no es enseñar a programar, es manejar sus aplicaciones en diferentes problemas de matemáticas, estadística, probabilidad y física. En el capítulo I se aborda el tema del álgebra, trigonometría y cálculo; el capítulo II presenta algunos tópicos de estadística que sabemos son de utilidad en la practica y, finalmente, en este mismo capítulo se encuentran unas pequeñas pruebas de geometría y física de gran utilidad en el laboratorio de física.

Los autores.

1

Álgebra y cálculo

1. ALGO DE ARITMÉTICA
Fórmulas con EXCEL

FRACCIONES ARITMÉTICAS

EJEMPLO 1.

Resolvamos la fracción: $\dfrac{1026}{(3{,}15) - (1{,}005)}$

En EXCEL escribimos:

=(1026)/(3,15-1,005) y obtenemos: 478,32

Esto lo podemos hacer en cualquier celda así:

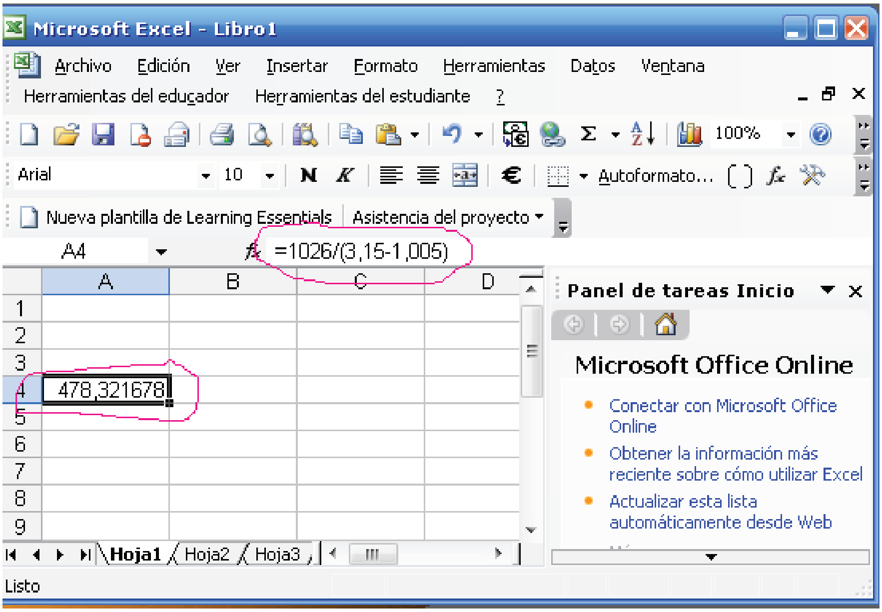


Figura 1.

Como vemos el resultado aparece en la celda A4, pero podemos ver la fórmula en el sector de f_x .

EJEMPLO 2.

Simplificar la fracción compleja: $$\frac{\frac{1478-210}{2,3-1,1}+1}{19^2-\frac{1,004}{0,5}}$$

En EXCEL tenemos: =((1478-210)/(2,3-1,1)+1)/(19^2-(1,004/0,5)

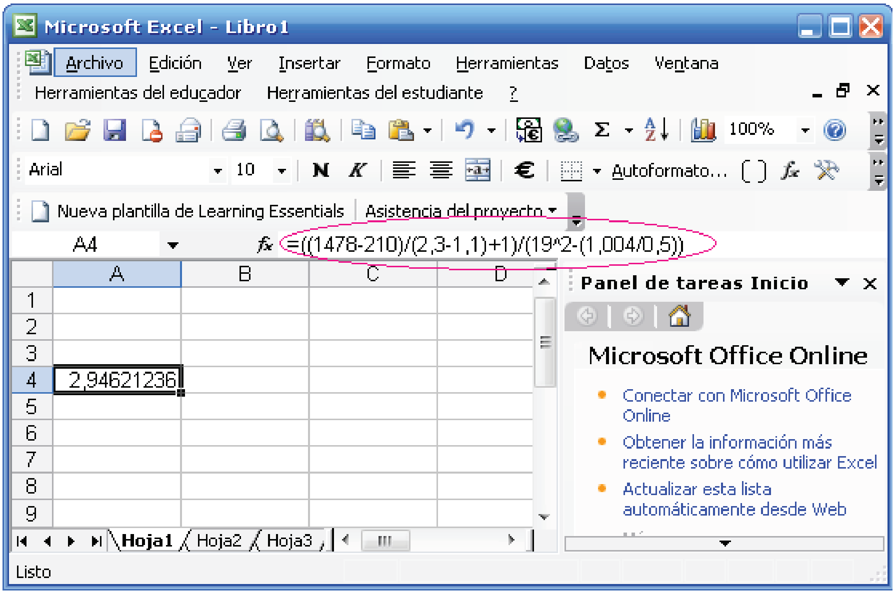


Figura 2.

CÁLCULOS CON FUNCIONES

EJEMPLO 3.

Calcular: $$\frac{\frac{\log(3)}{sen(30)}}{\sqrt{3}}$$

En EXCEL encontramos las funciones de la calculadora científica más compleja.

Para este caso tenemos:

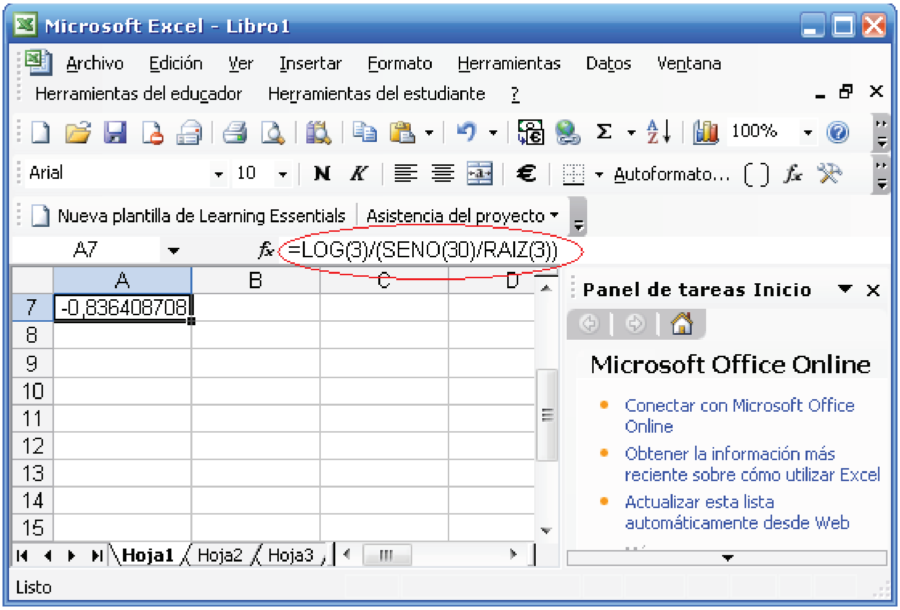


Figura 3.

Calculemos el volumen de un cono, recordemos: $V = \dfrac{\pi\, r^2\, h}{3}$

Datos: *r = 27 cm.* *h = 85 cm.*

En EXCEL ubicamos los datos en dos celdas (las que queramos), por ejemplo en A4 y A5 escribimos los datos suministrados, el número PI EXCEL lo toma como función así: PI( ) y se dejan los paréntesis vacíos.

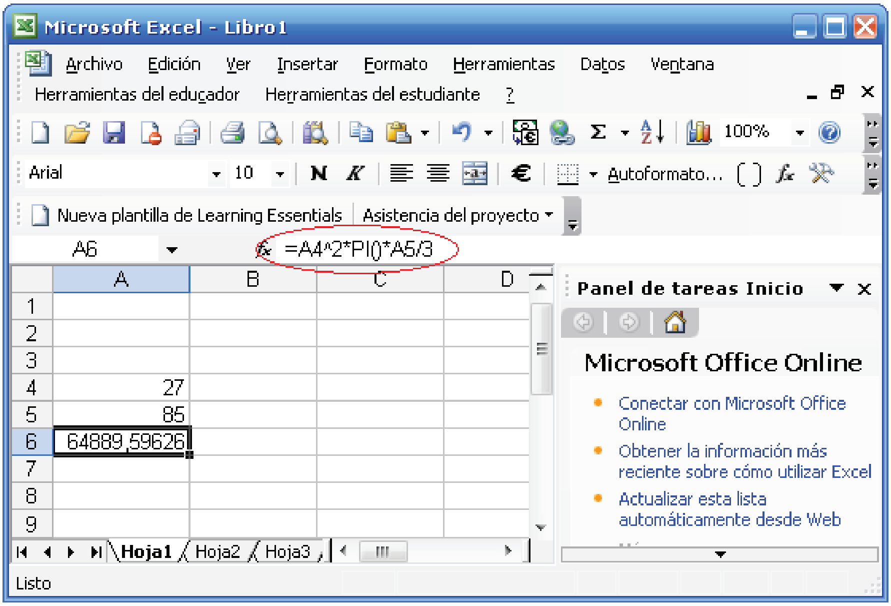


Figura 4.

Hagamos lo anterior para diferentes valores, debemos hacer una tabla de doble entrada.

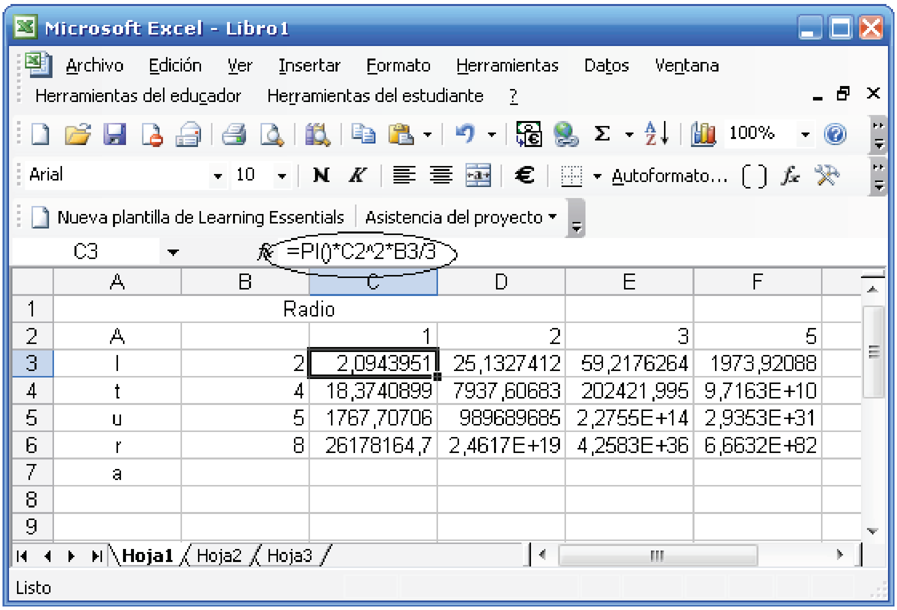
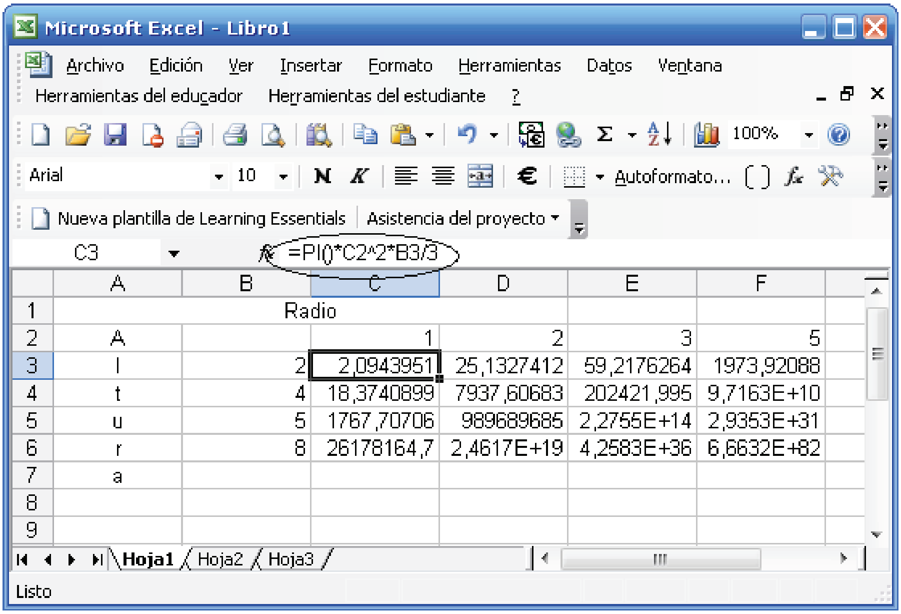


Figura 5.

Explicación:

- En forma horizontal escribimos el radio y sus valores
- En forma vertical escribimos los datos de la altura
- escribimos en la celda C3 la fórmula del cono
- Luego de calcularla mediante enter, regresamos a ella y la copiamos en toda la tabla
- Finalmente obtenemos el siguiente resultado:



	A	B	C	D	E	F
1		Radio				
2	A		1	2	3	5
3	l	2	2,0943951	25,1327412	59,2176264	1973,92088
4	t	4	18,3740899	7937,60683	202421,995	9,7163E+10
5	u	5	1767,70706	989689685	2,2755E+14	2,9353E+31
6	r	8	26178164,7	2,4617E+19	4,2583E+36	6,6632E+82
7	a					
8						
9						

Figura 6.

CÁLCULO DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

El mínimo común múltiplo de dos o más números lo podemos calcular en EXCEL mediante la función =M.C.D (#1; #2;…;) de 1 a 29 valores.
De igual manera se realiza con el mínimo común múltiplo =M.C.M (#1; #2;…) hasta 29 valores. En la hoja de cálculo de EXCEL en las celdas C2, C3 y C4 escribimos los números a los cuales les queremos calcular el M.C.D y el m.c.m y en las celdas B6 y B7 (que puede ser cualquiera) escribimos las fórmulas de éstos, respectivamente, para obtener:

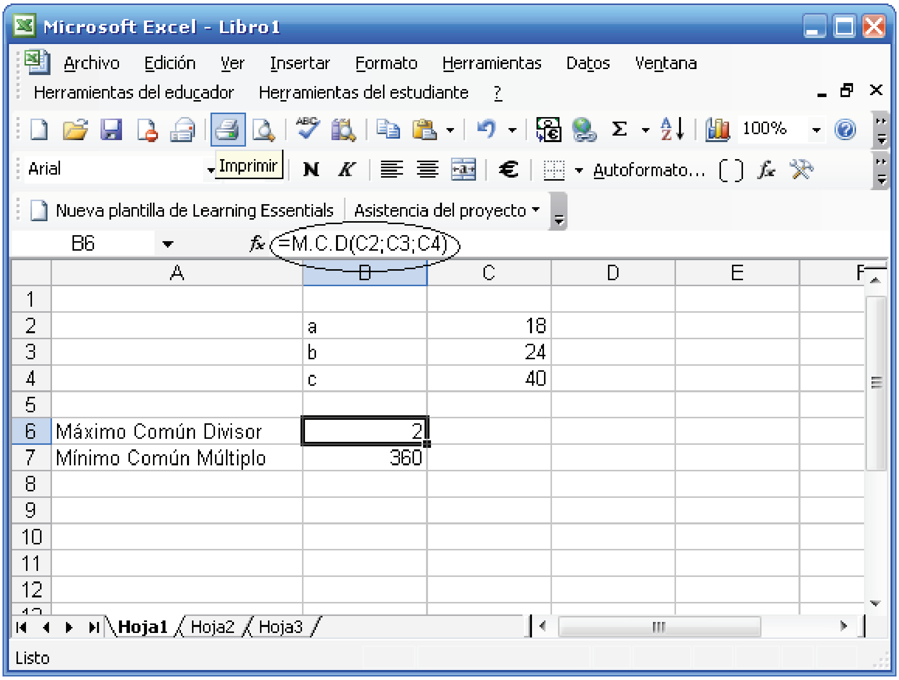


Figura 7.

1.1 APLICACIONES EN ÁLGEBRA Y FUNCIONES

GRÁFICOS EN EXCEL

EJEMPLO 4.

Graficar $y = 2x + 1$

Abrimos EXCEL y empezamos una serie en -10 hasta 10, para ello damos un clic en *edición* y luego en *rellenar series*, para obtener:

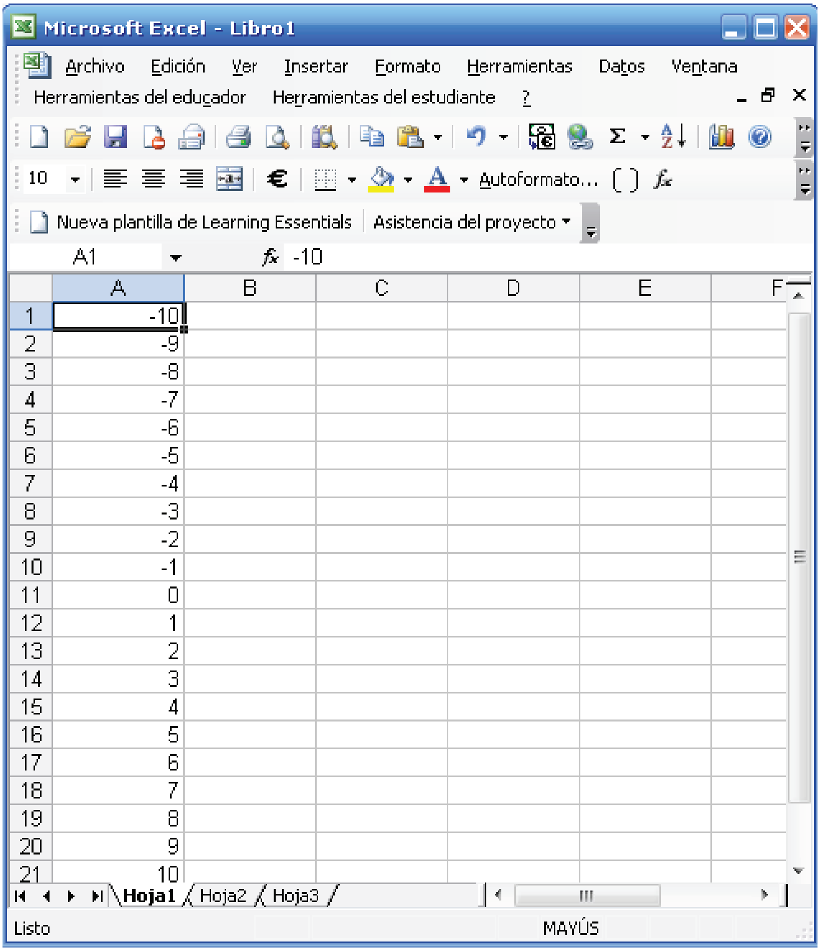


Figura 8.

En la columna B introducimos la función $y = 2x + 1$, que en EXCEL debe ser:

$2*A1+1$ y enter, luego arrastramos el resto de las celdas hasta *10*.

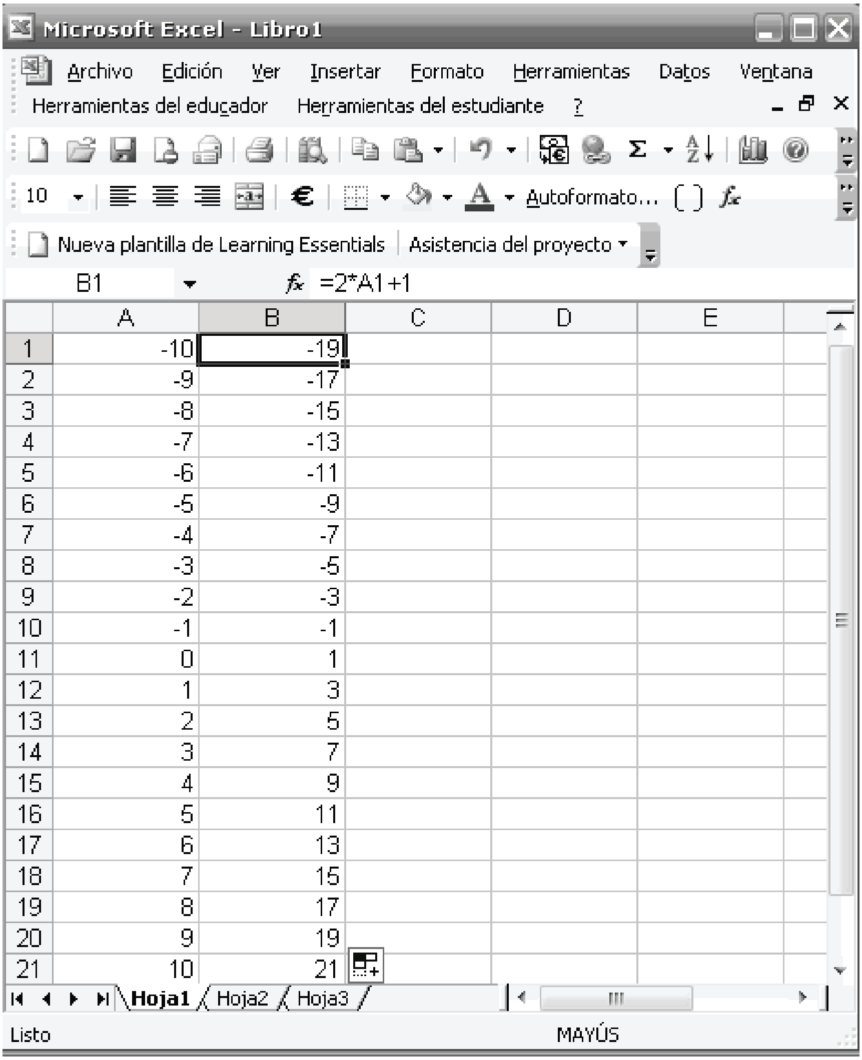


Figura 9.

En la barra de herramientas, en asistente para gráficos seleccionamos XY (dispersión).

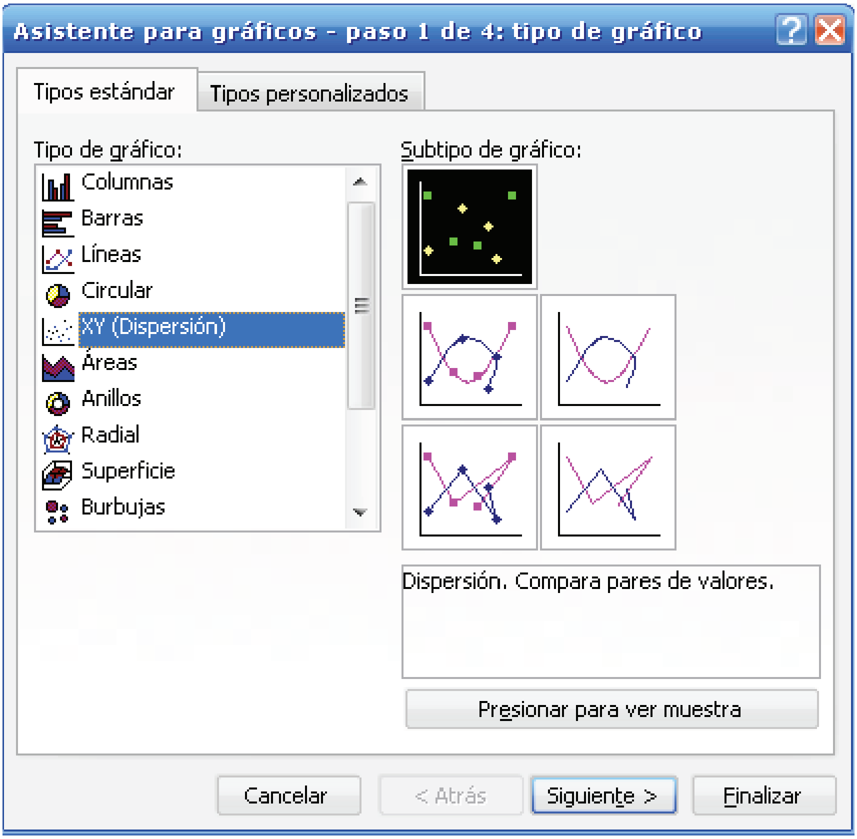
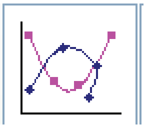


Figura 10.

Clic en  damos siguiente y seleccionamos la serie, luego siguiente, finalizar para obtener el siguiente gráfico:

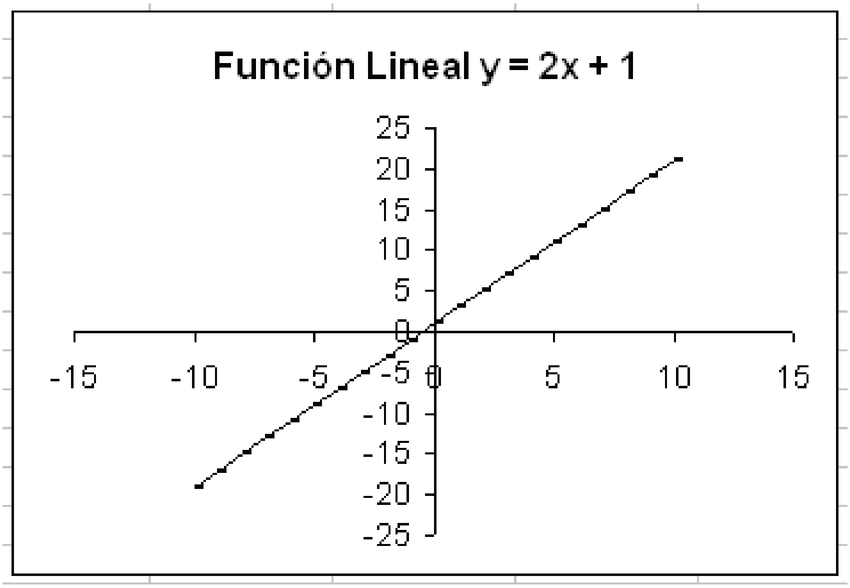


Figura 11.

Gráfico de una función trigonométrica

Solución de cualquier ecuación de primer grado del tipo $ax + b = 0$

Diseñamos una hoja de cálculo en EXCEL que tiene las siguientes características:

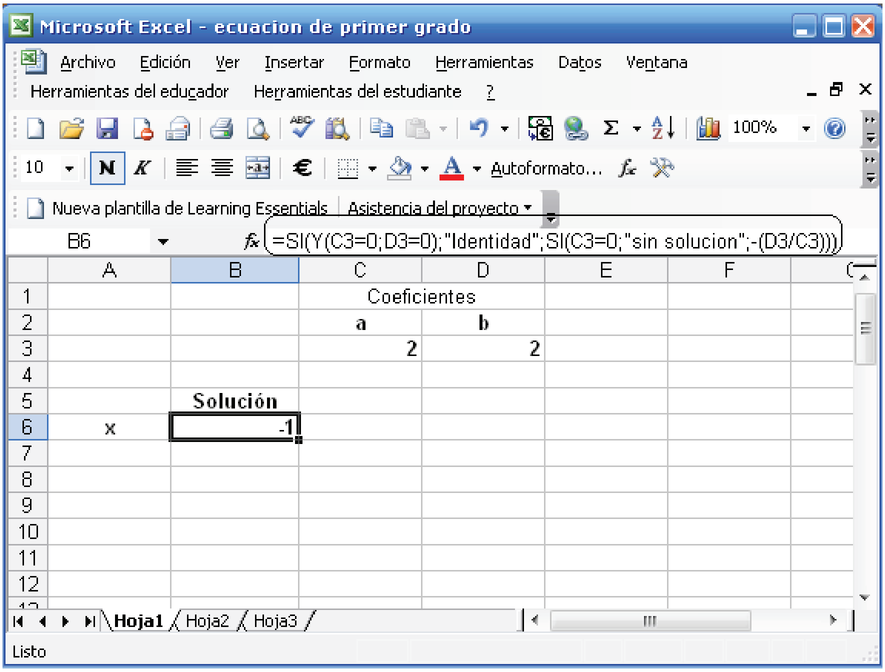


Figura 12.

En B6 escribimos:
= SI (Y (C3=0; D3=0);"identidad"; SI (C3=0;"sin solución";(-D3/ C3)))

Con esta función hecha a través de un condicional se consigue la solución.

El condicional siempre maneja lo siguiente:
SI (prueba _ lógica;[valor_si_verdadero];[valor_si_falso])

Solución de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

Sabemos que: Si $b^2 - 4ac > 0$ tiene dos raíces reales y diferentes
Si $b^2 - 4ac < 0$ tiene dos raíces imaginarias
Si $b^2 - 4ac = 0$ tiene dos raíces iguales (multiplicidad dos)

El término $b^2 - 4ac$ es llamado discriminante.

EJEMPLO 5.

Resolver la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$

La hoja de cálculo en EXCEL queda de la siguiente manera:

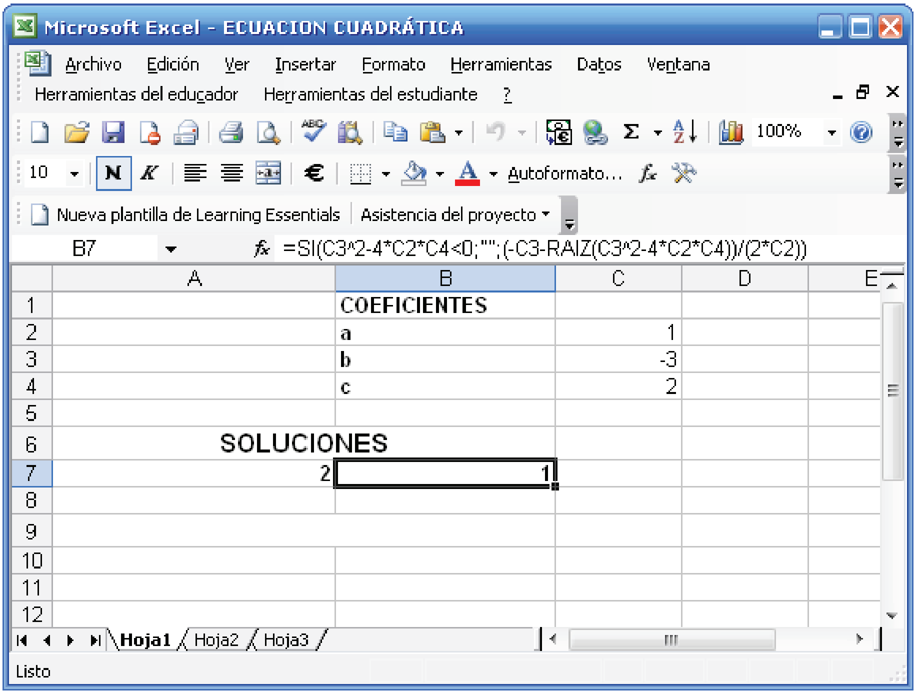


Figura 13.

Mediante un condicional se escriben las restricciones anteriores para el discriminante.

En A7 se escribe:
=Si (C3^2-4*C2*C4<0;"Sin Solución";(-C3+RAIZ(C3^2-4C2*C4))/(2*C2))

En B7 se escribe:
=Si (C3^2-4*C2*C4<0;"";(-C3+RAIZ (C3^2-4C2*C4))/(2*C2))

Con esta hoja podemos resolver cualquier ecuación en los reales. Cuando sale el mensaje no tiene solución es imaginaria.

EJEMPLO 6.

Trazar el gráfico de: $y = sen\ x$

Realizamos el mismo procedimiento anterior, pero en la columna B de Excel utilizamos f_x pegar función y seleccionamos matemáticas y trigonométricas en la cual está la función seno, así:

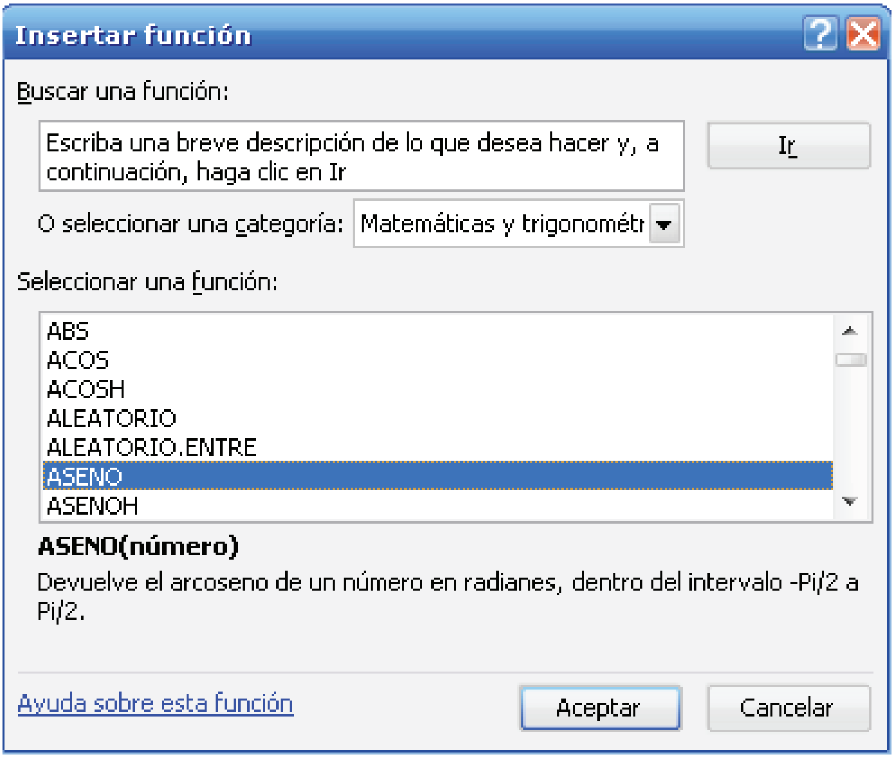
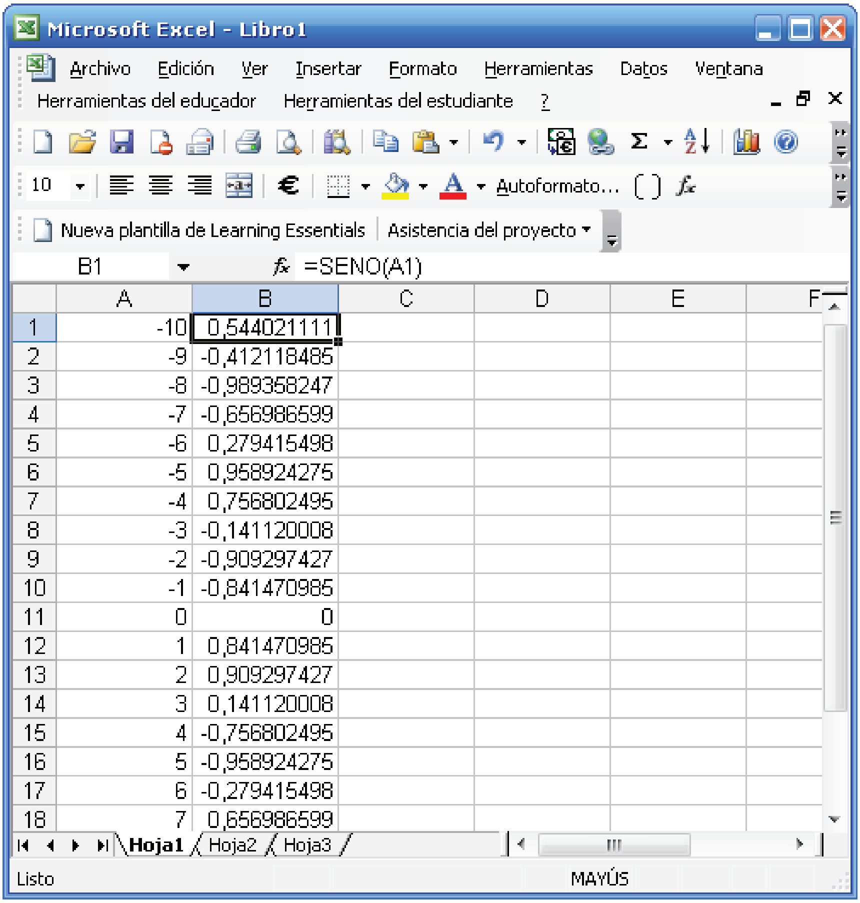


Figura 14.



	A	B
1	-10	0,544021111
2	-9	-0,412118485
3	-8	-0,989358247
4	-7	-0,656986599
5	-6	0,279415498
6	-5	0,958924275
7	-4	0,756802495
8	-3	-0,141120008
9	-2	-0,909297427
10	-1	-0,841470985
11	0	0
12	1	0,841470985
13	2	0,909297427
14	3	0,141120008
15	4	-0,756802495
16	5	-0,958924275
17	6	-0,279415498
18	7	0,656986599

Figura 15.

El gráfico es:

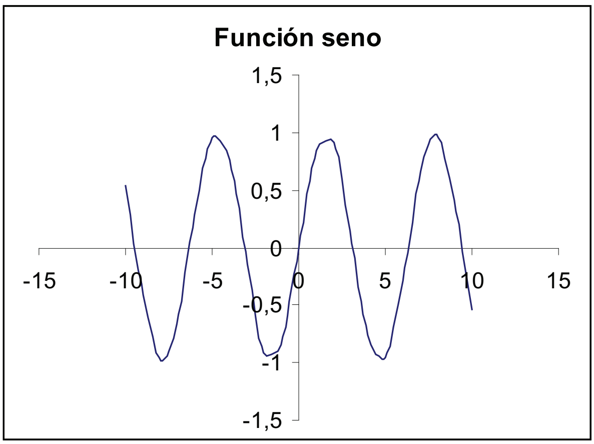


Figura 16.

Gráfico de una función cuadrática

EJEMPLO 6A.

Trazar el gráfico de: $y = 3x^2 + 4$

Se realiza el mismo procedimiento inicial (rellenar series), luego se escribe en la columna B en EXCEL la ecuación de la función.

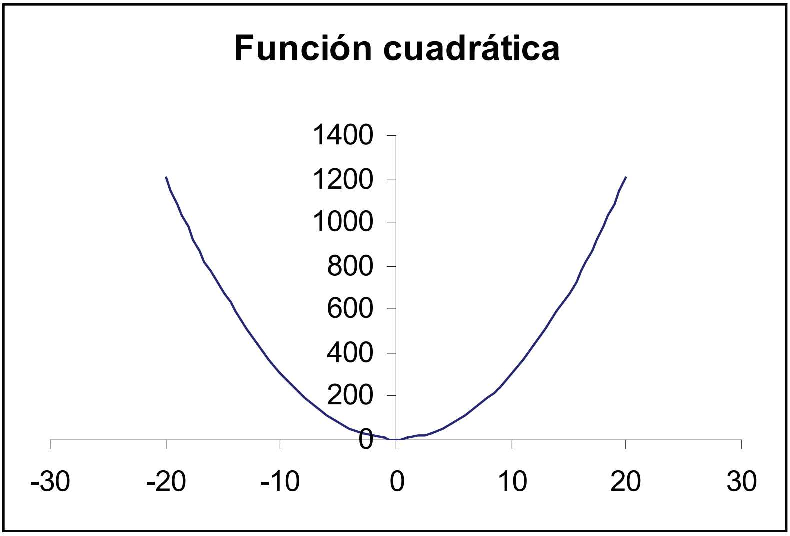


Figura 17.

EJEMPLO 6B.

Trazar el gráfico de: $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

Para ello se crea la siguiente tabla: al frente de incremento escribir =(B3-B2)/50 como vamos a trabajar con x en A6, clic en *insertar* luego *nombre definir* se escribe x en la primera línea y al final $A6 y así nos quedara x como la variable. En la celda B7 escribimos la función que nos dieron $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$ y luego copiamos hasta la celda B56 para obtener la tabla que mostramos a continuación:

x inicial	-2			
x final	4			
incremento	0,12			
x				
-2			1,12	-2
-1,88	-8		1,24	-2,089472
-1,76	-6,419072		1,36	-2,110976
-1,64	-5,029376		1,48	-2,054144
-1,52	-3,820544		1,6	-1,908608
-1,4	-2,782208		1,72	-1,664
-1,28	-1,904		1,84	-1,309952
-1,16	-1,175552		1,96	-0,836096
-1,04	-0,586496		2,08	-0,232064
-0,92	-0,126464		2,2	0,512512
-0,8	0,214912		2,32	1,408
-0,68	0,448		2,44	2,464768
-0,56	0,583168		2,56	3,693184
-0,44	0,630784		2,68	5,103616
-0,32	0,601216		2,8	6,706432
-0,2	0,504832		2,92	8,512
-0,08	0,352		3,04	10,530688
0,04	0,153088		3,16	12,772864
0,16	-0,081536		3,28	15,248896
0,28	-0,341504		3,4	17,969152
0,4	-0,616448		3,52	20,944
0,52	-0,896		3,64	24,183808
0,64	-1,169792		3,76	27,698944
0,76	-1,427456		3,88	31,499776
0,88	-1,658624		4	35,596672
1	-1,852928			

La gráfica es la siguiente:

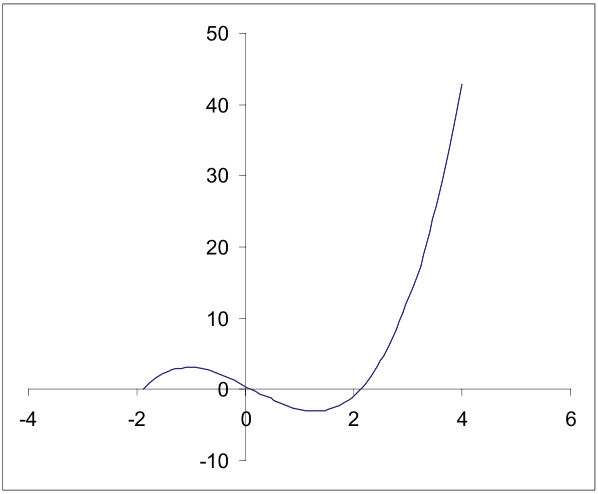


Figura 18.

Gráfico de una coordenada polar

EXCEL calcula el seno y el coseno en radianes no en grados, por ello debemos efectuar previamente la transformación de grados a radianes utilizando la fórmula: π / 180

Coordenadas polares

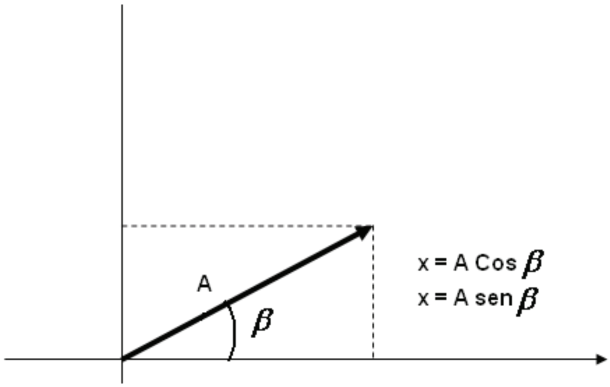


Figura 19.

Coordenadas Cartesianas

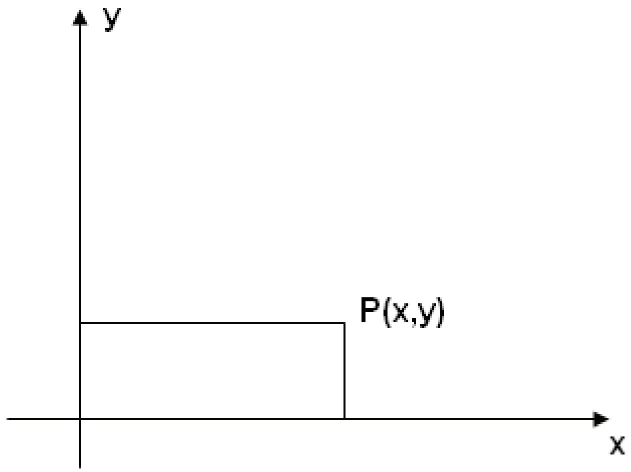


Figura 20.

EJEMPLO 7.

Vamos a graficar la espiral de Arquímedes. Para ello elaboramos una tabla que tenga en la primera columna grados, en la siguiente contendrá radianes, y se debe utilizar la siguiente fórmula: (columna B radianes).

=A1*PI ( )/180 la cual debe ser copiada en todo el rango afectado.

En la columna C (d) consignaremos la distancia al origen de coordenadas; esta distancia puede ser fija o variable.

En las dos últimas columnas están los valores *x* e *y* que representaremos. Estos valores se calculan con las siguientes fórmulas:

=A2*cos (B2)
=A2*sen (B2)

Con estos datos se obtiene la siguiente tabla:

Grados	Radianes	d	x	y
0	0	10	0	0
10	0,17453293	11	9,84807753	1,736481777
20	0,34906585	12	18,7938524	6,840402867
30	0,52359878	13	25,9807621	15
40	0,6981317	14	30,6417777	25,71150439
50	0,87266463	15	32,1393805	38,30222216
60	1,04719755	16	30	51,96152423
70	1,22173048	17	23,94141	65,77848346
80	1,3962634	18	13,8918542	78,78462024
90	1,57079633	19	5,5132E-15	90
100	1,74532925	20	-17,3648178	98,4807753
110	1,91986218	21	-37,6222158	103,3661883
120	2,0943951	22	-60	103,9230485
130	2,26892803	23	-83,5623893	99,58577761
140	2,44346095	24	-107,246222	89,99026536
150	2,61799388	25	-129,903811	75
160	2,7925268	26	-150,350819	54,72322293
170	2,96705973	27	-167,417318	29,5201902
180	3,14159265	28	-180	2,20527E-14
190	3,31612558	29	-187,113473	-32,99315376
200	3,4906585	30	-187,938524	-68,40402867
210	3,66519143	31	-181,865335	-105
220	3,83972435	32	-168,529777	-141,4132741
230	4,01425728	33	-147,84115	-176,1902219
240	4,1887902	34	-120	-207,8460969
250	4,36332313	35	-85,5050358	-234,9231552
260	4,53785606	36	-45,1485262	-256,0500158
270	4,71238898	37	-4,9619E-14	-270
280	4,88692191	38	48,6214897	-275,7461708
290	5,06145483	39	99,1858416	-272,51086
300	5,23598776	40	150	-259,8076211
310	5,41052068	41	199,264159	-237,4737774
320	5,58505361	42	245,134222	-205,6920351
330	5,75958653	43	285,788383	-165
340	5,93411946	44	319,495491	-116,2868487
350	6,10865238	45	344,682714	-60,77686218
360	6,28318531	46	360	-8,82107E-14

El gráfico es:

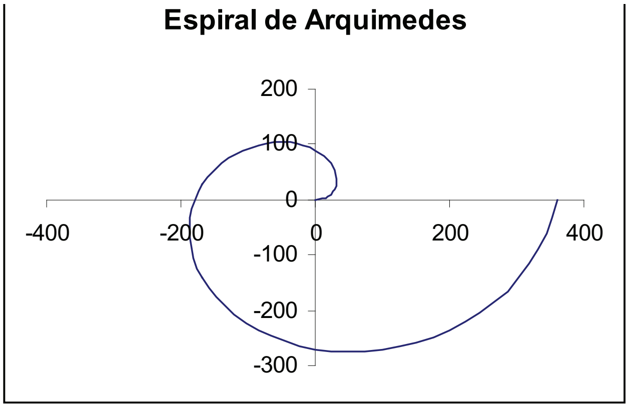


Figura 21.

Solución de ecuaciones simultáneas gráficamente

EJEMPLO 8.

Resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$

Solución: se elabora una tabla para cada ecuación.

-10	20	10
-9	18	9,25
-8	16	8,5
-7	14	7,75
-6	12	7
-5	10	6,25
-4	8	5,5
-3	6	4,75
-2	4	4
-1	2	3,25
0	0	2,5
1	-2	1,75
2	-4	1
3	-6	0,25
4	-8	-0,5
5	-10	-1,25
6	-12	-2
7	-14	-2,75
8	-16	-3,5
9	-18	-4,25
10	-20	-5

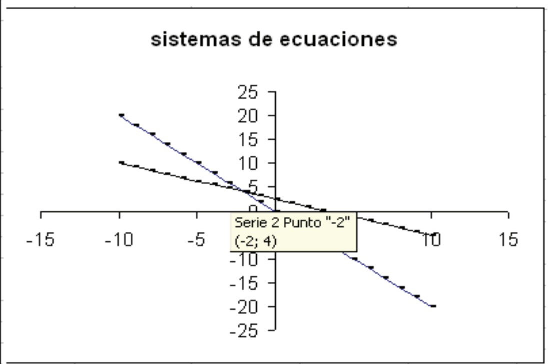


Figura 22.

Como vemos la solución es el punto ***(-2, 4).***

1.2 SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES CON MÁS DE TRES VARIABLES

Excel tiene una herramienta para resolver sistemas de ecuaciones con más de tres variables (sin dejar de lado que resuelve también sistemas de 2 x 2). Dicha herramienta se llama **Solver**, ella se encuentra en la barra de herramientas:

EJEMPLO 9.

Resolver el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2x+2y-6z+5w=12 \\ -3x+7y+4z-w=15 \\ 7x+8y-6z+4w=10 \\ x+y+z+w=1 \end{cases}$$

Solución:

En Excel validamos las variables, pues este no las reconoce. Validar es darle un valor a cada variable, un número; se utiliza el uno (1).

Veamos:

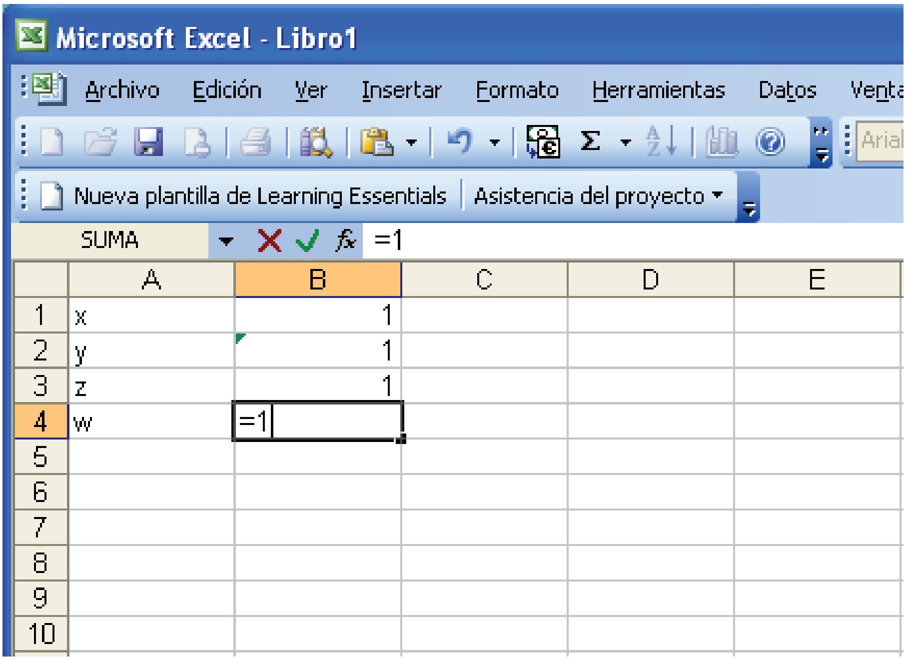


Figura 23.

El siguiente paso es escribir las ecuaciones en lenguaje de Excel.

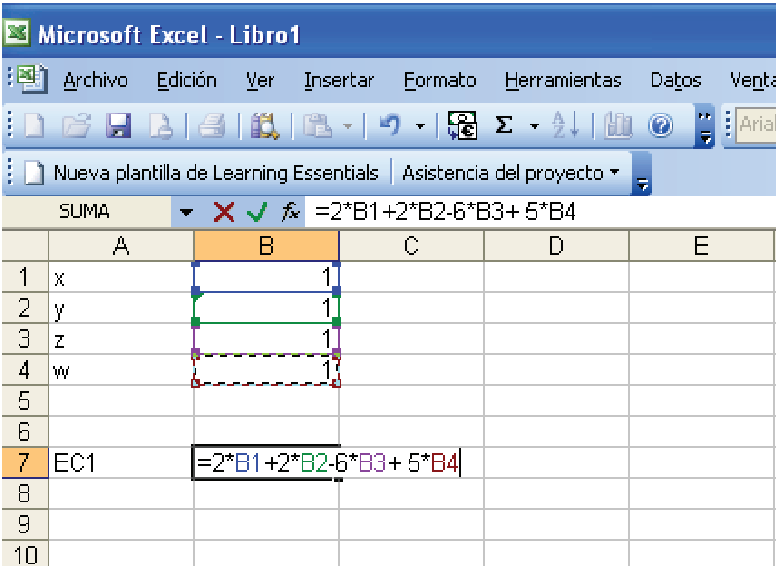


Figura 24.

Corresponde a la ecuación 1. Vamos a introducir las demás pero, ellas ya nos arrojarán los números que validan cada una.

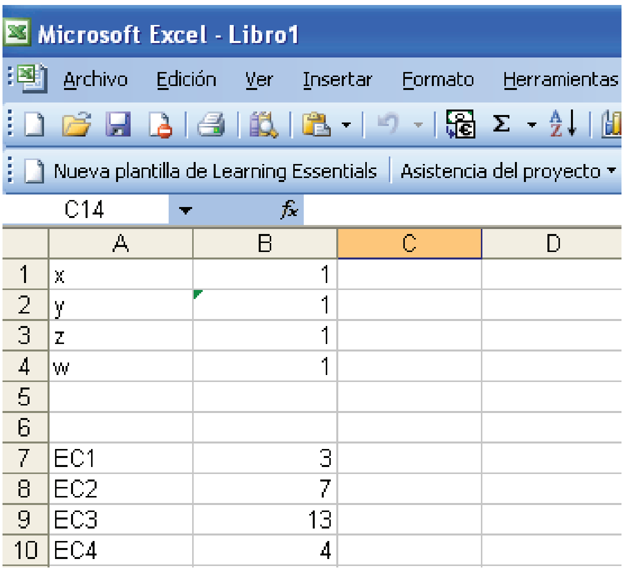


Figura 25.

Ahora, vamos a Excel de nuevo y en la barra de herramientas damos clic para saber si está **Solver.**

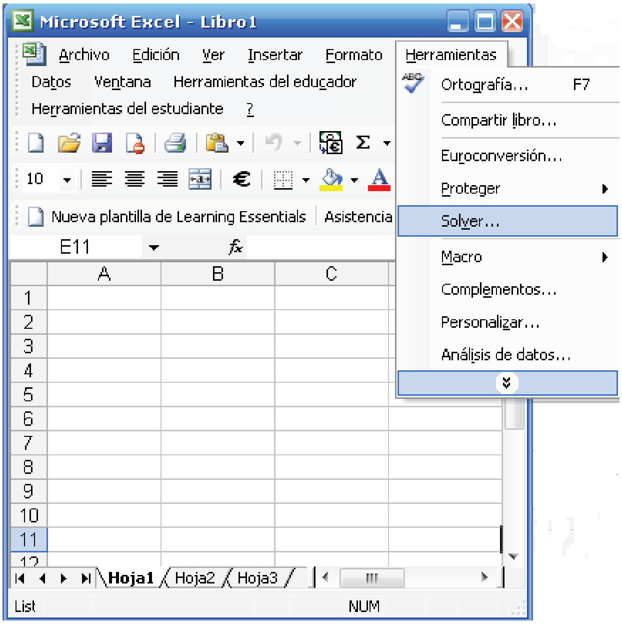


Figura 26.

Cuando esta herramienta no aparece, se debe habilitar en **Complementos** de la barra de herramientas de Excel. Si no aparece debe pedir que reinstalen el sistema y adjunten esta herramienta.

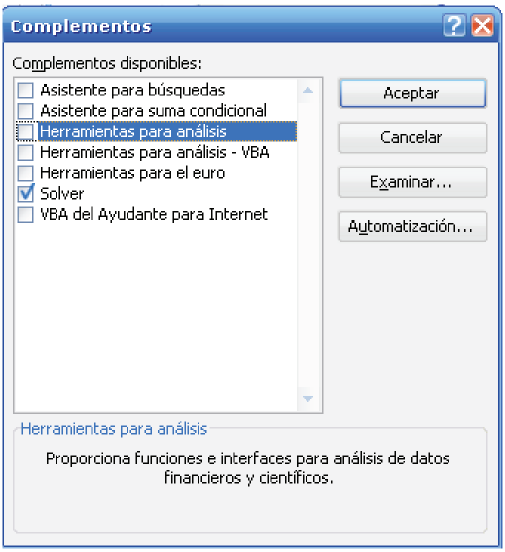


Figura 27.

Ahora debemos usar la herramienta para resolver el sistema de ecuaciones, para ello se habilita *solver* dando clic en la barra de herramientas y luego en solver.

Figura 28.

Ahora vamos a introducir las variables y su validación, usamos la ventana *Estimar* y allí introducimos la validación de las variables, es decir: B1, B2, B3 y B4. En la ventana *Agregar*, introducimos las ecuaciones (su validación): en este caso: B7 , B8, B9 y B10.

Figura 29.

Agregamos una a una las ecuaciones:

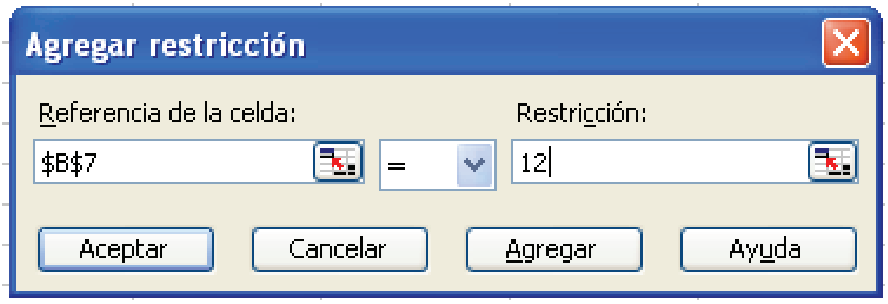


Figura 30.

Cuando vamos a agregar la última, damos aceptar y obtenemos:

Figura 31.

Ahora, clic en opciones, en esta ventana habilitamos la ventana **adoptar modelo lineal.**

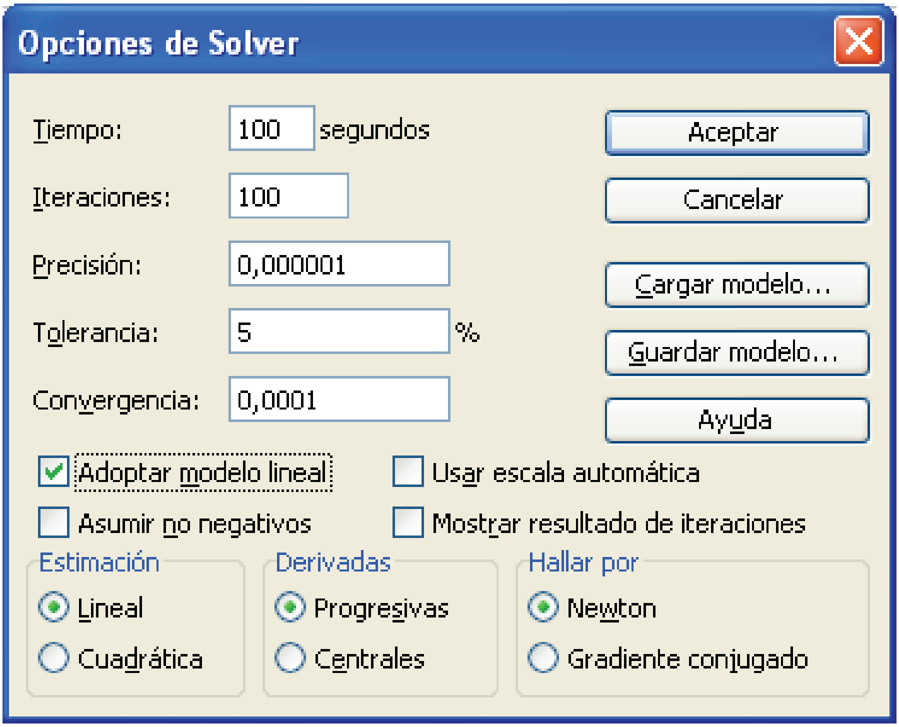


Figura 32.

Luego de ello, clic en aceptar. Cuando estemos en la ventana donde agregamos las ecuaciones, clic en *Resolver* y obtenemos la solución.

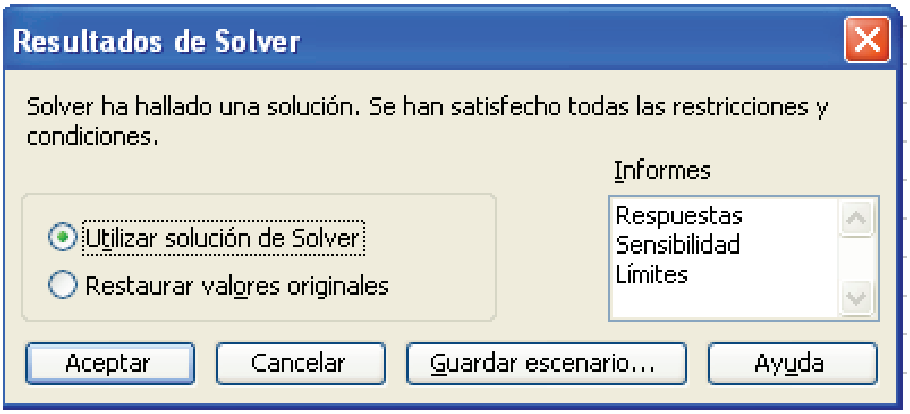


Figura 33.

En la ventana informes donde aparecen las respuestas, damos clic y ella nos envía a una hoja nueva de Excel llamada hoja de respuestas.

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$1	x	1	-2,167916042
$B$2	y	1	1,791604198
$B$3	z	1	-0,533733133
$B$4	w	1	1,910044978

Las soluciones son:

$$\begin{aligned} x &= -2,1679 \\ y &= 1,79160 \\ z &= -0,53373 \\ w &= 1,9100 \end{aligned}$$

Esta es buena opción para resolver sistemas de ecuaciones.

También se puede resolver sistemas de desigualdades con el mismo procedimiento, lo único que se cambia es el signo igual por el desigual

$(\leq, \ \geq, \ <, >)$.

EJEMPLO 10.

Resolver el sistema: $\begin{cases} 16x^2 + 2y^2 = 12 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$

Solución:

Se realiza el mismo procedimiento con el cual se resolvió el anterior sistema, sólo que ahora se adopta un modelo cuadrático.

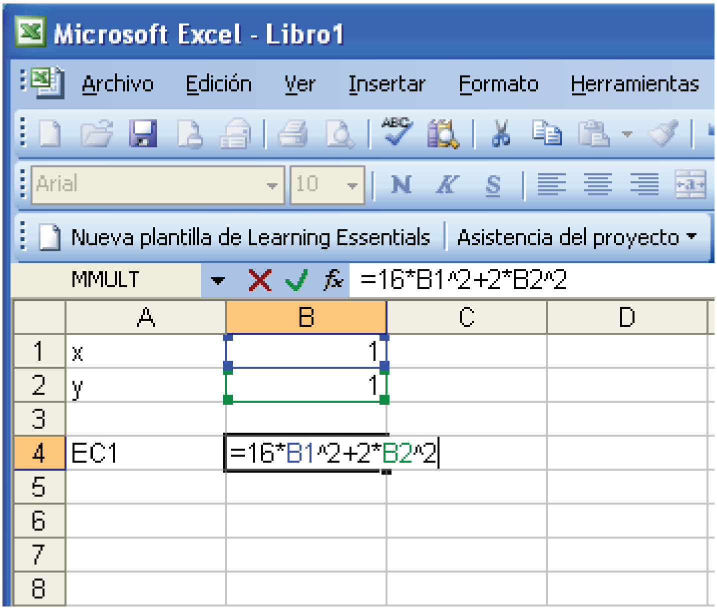


Figura 34.

Introducimos la ecuación dos.

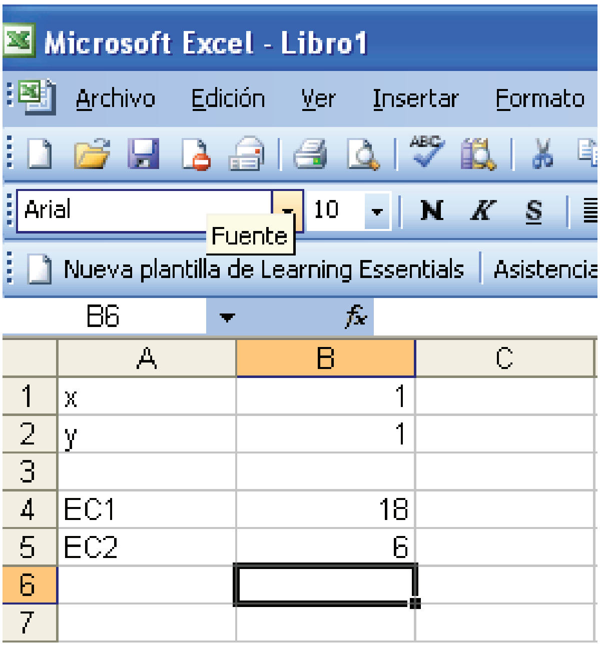


Figura 35.

Ahora usamos **Solver.**

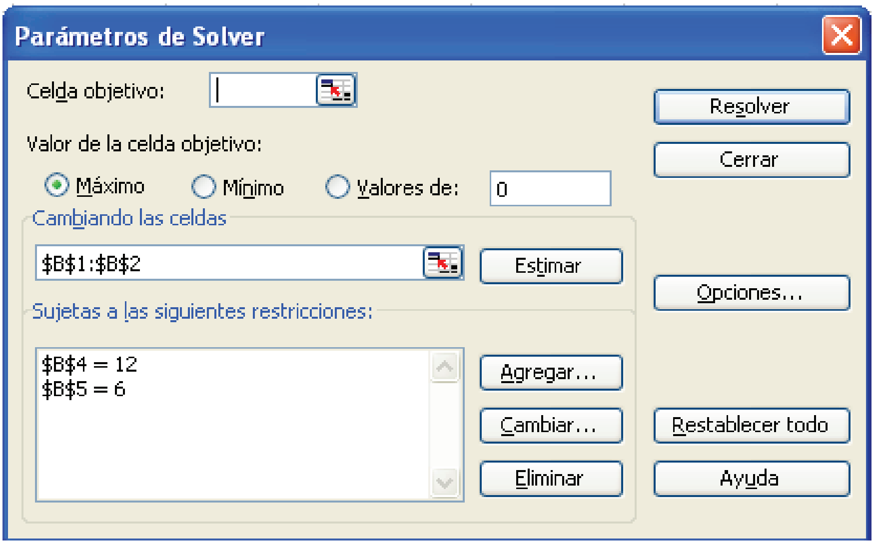


Figura 36.

Clic en opciones, allí en estimación, adoptamos cuadrática. Como se ve en la siguiente ventana.

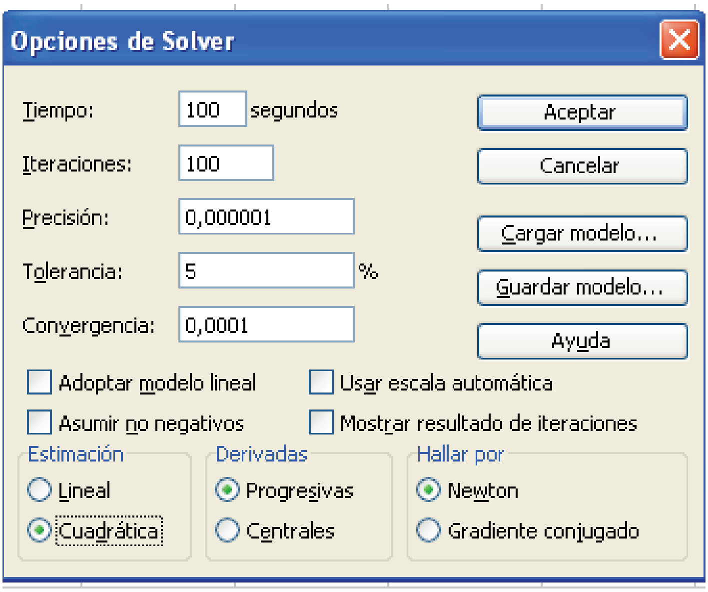


Figura 37.

Click en aceptar y regresamos a la ventana de la figura, damos clic en resolver y obtenemos mediante la hoja de respuestas la cual se habilita con clic en aceptar y así obtenemos la solución, (ver ventana siguiente).

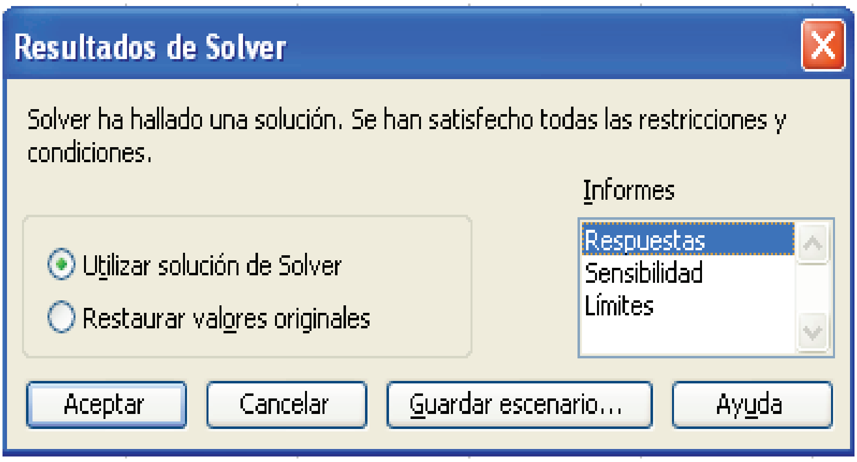


Figura 38.

La hoja respuesta muestra la solución.

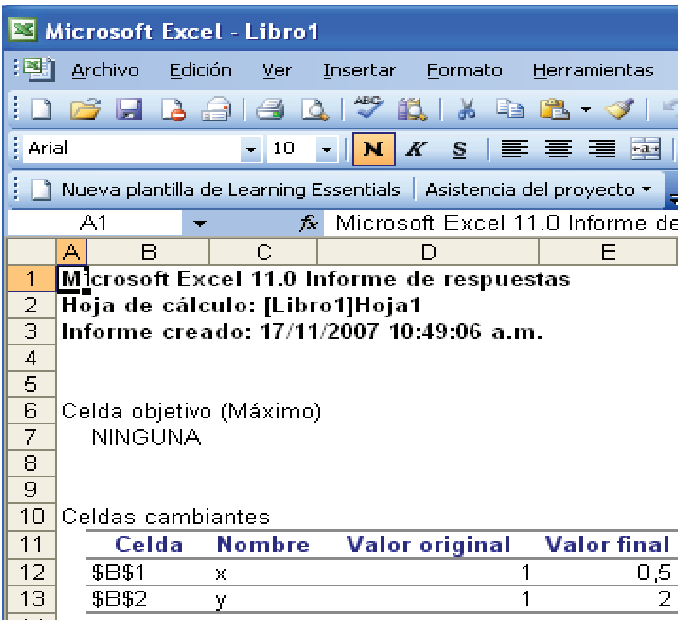


Figura 39.

Modelo de Programación Lineal

Ejemplo para resolver el modelo: Maximizar $8x_1 + 10x_2$

Sujeto a las restricciones

$$x_1 + 2x_2 \leq 100$$
$$3x_1 + 4x_2 \leq 320$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 220$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

Solución:

Utilizamos *Solver* para ello, primero validamos como en la solución de ecuaciones y luego introducimos cada restricción en otras celdas. La hoja quedaría así:

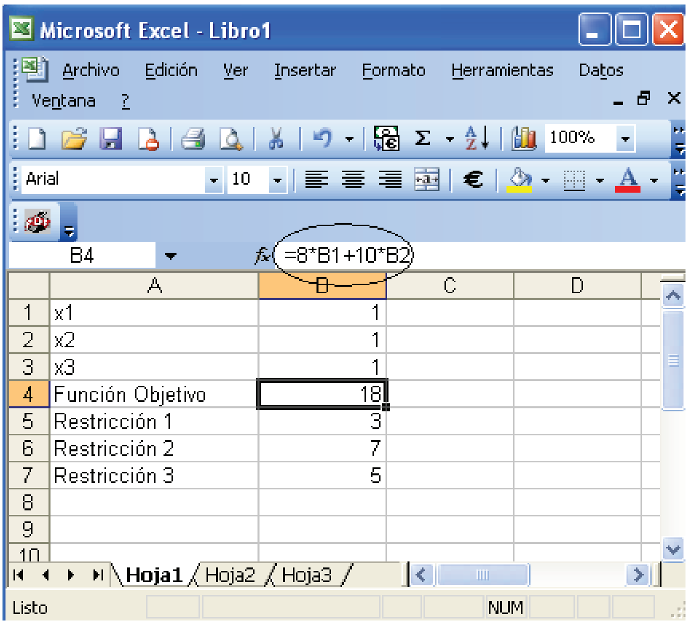


Figura 40.

Ahora llamamos a *Solver* y en la celda objetivo introducimos la función objetivo. En combinando celda los valores de x_1, x_2 y x_3 su validación; es decir las celdas B1 a B3. y las restricciones las agregamos, teniendo presente que utilizamos el signo de desigualdad.

La hoja es la siguiente:

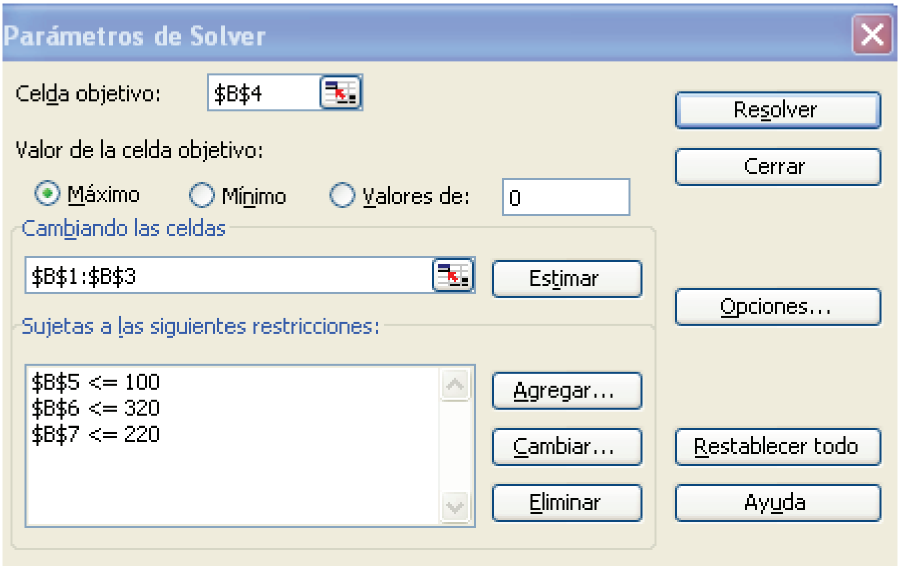


Figura 41.

Clic en opciones y habilitamos adoptar modelo lineal y asumir no negativos, lo demás lo dejamos igual, finalmente clic en aceptar y resolver.

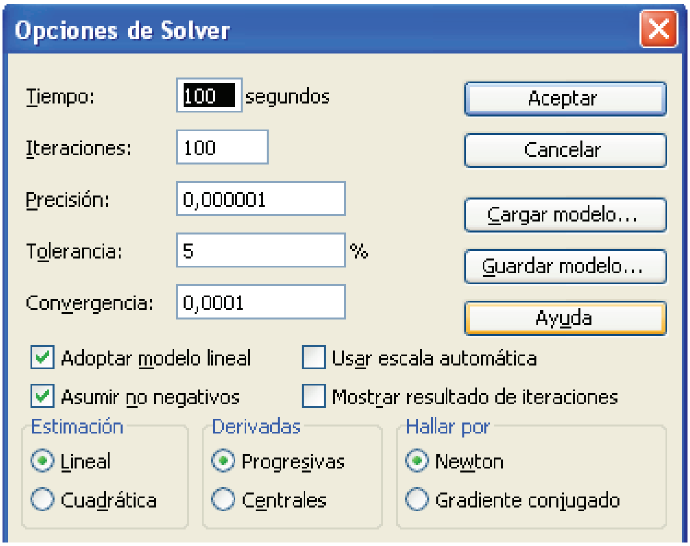


Figura 42.

En la hoja de respuestas encontramos la solución:

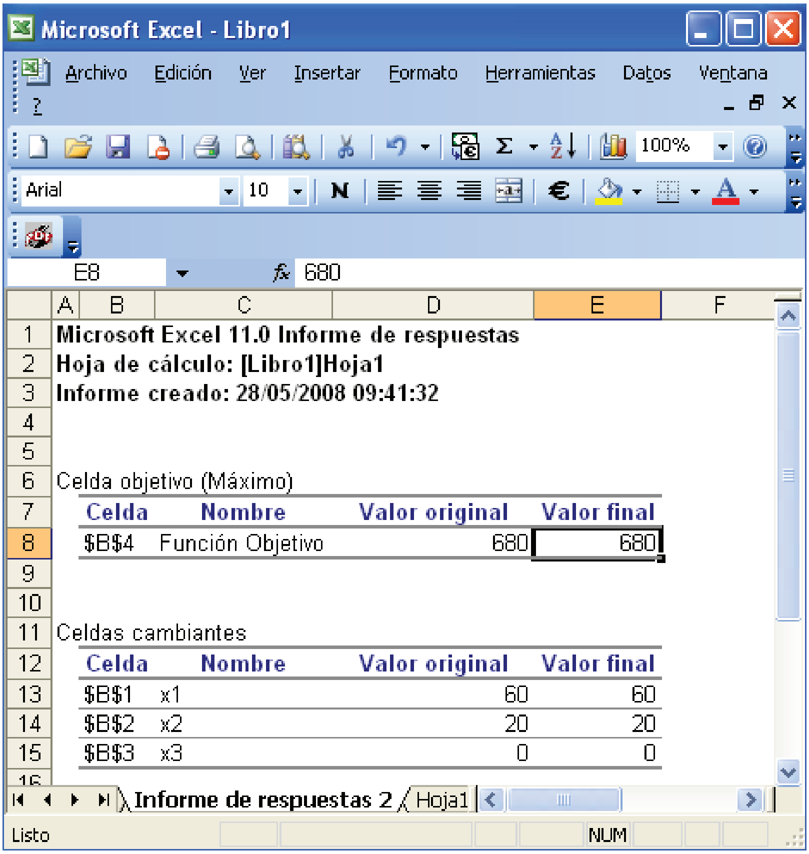


Figura 43.

Como vemos la solución está dada por: $x_1 = 60, x_2 = 20$ y $x_3 = 0$ el valor máximo es 680. La solución está dada por $x = 1/2 \quad y = 2$ (compruébelo a mano)

CÁLCULO DE MATRICES Y DETERMINANTES

EJEMPLO 11.

Crear la matriz $$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 12 \\ 4 & 45 & -8 \\ 12 & 15 & 17 \end{bmatrix}$$

Escribimos en la hoja de Excel los elementos de la matriz.

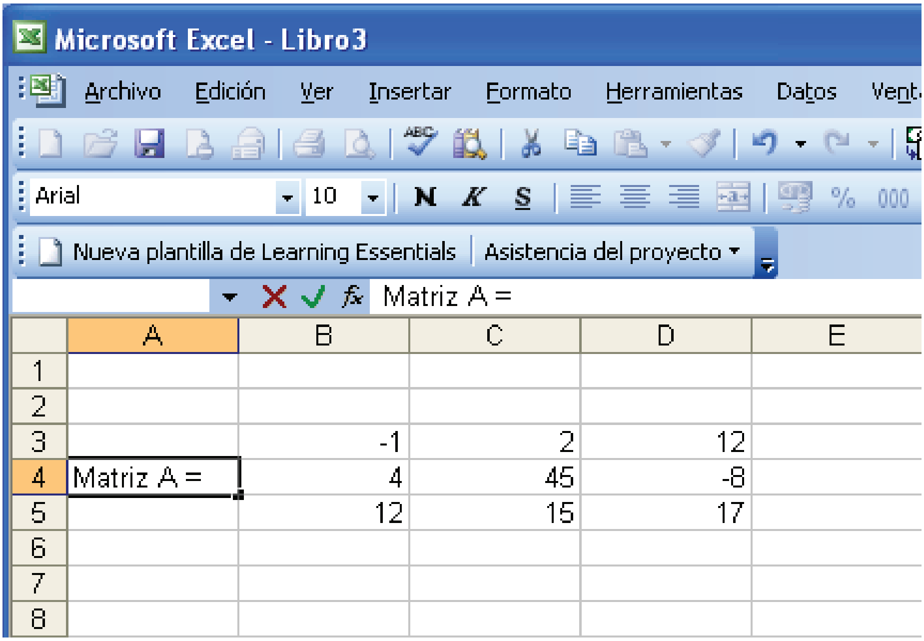


Figura 44.

1.3 OPERACIONES CON MATRICES

SUMA

Deben ser de igual tamaño (igual número de filas y columnas)

EJEMPLO 12.

Sumar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 23 & 56 & 78 \\ 15 & 7 & 19 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 23 \\ 56 & 17 & 98 \\ 76 & 5 & 43 \end{bmatrix}$$

Solución:

Escribimos las matrices como lo hicimos en su creación.

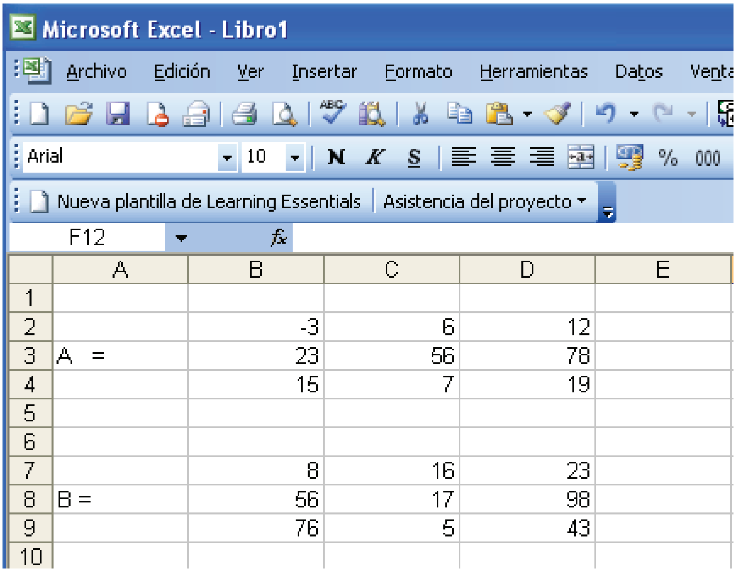


Figura 45.

La matriz A está definida en el bloque B2:D4 y B en el bloque B7:D9. Seleccionamos el bloque donde aparecerá la suma que debe ser de tres por tres (3 X 3), pues las matrices son de ese tamaño y su resultado también lo será.

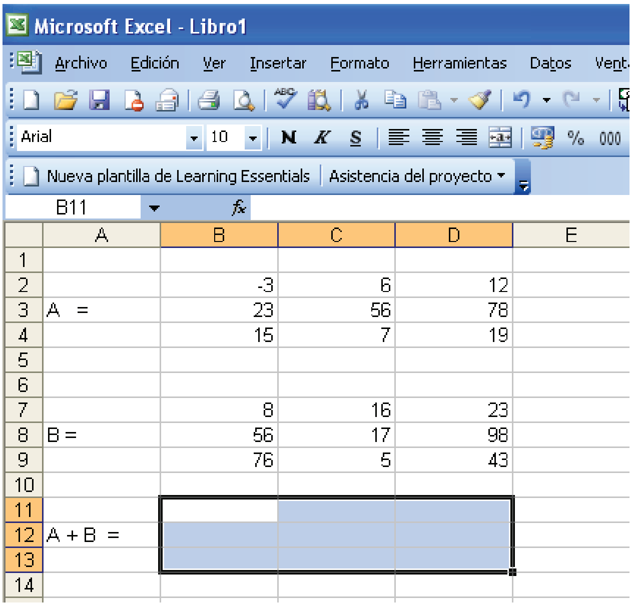


Figura 46.

En la línea de edición de Excel escribimos la fórmula:

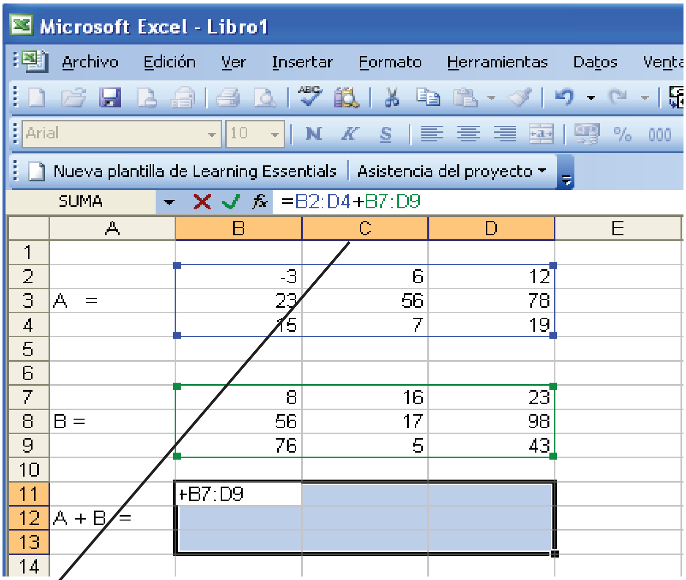


Figura 47.

A + B = B2:D4 + B7 + D9

Ahora presionamos simultáneamente **control, Mayúsculas y Enter,** al soltarlas se obtiene la suma (igual para la diferencia).

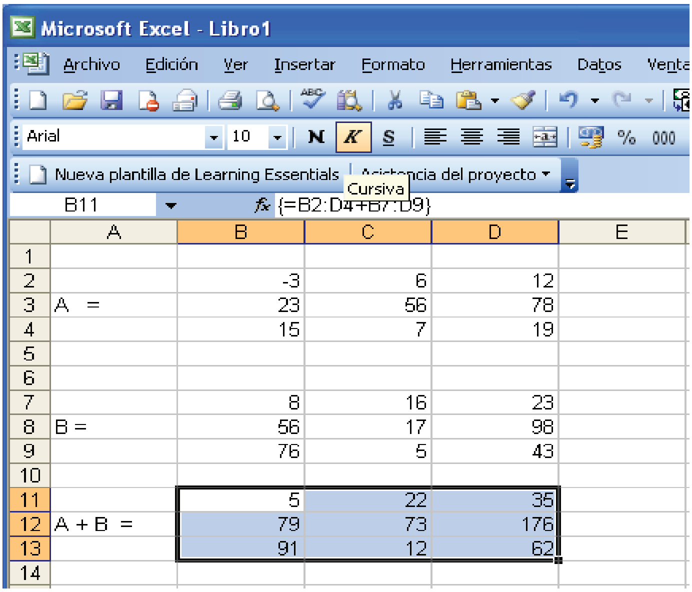


Figura 48.

Multiplicación por un escalar

EJEMPLO 13.

Multiplicar: $\begin{bmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 23 & 56 & 78 \\ 15 & 7 & 19 \end{bmatrix}$ por el escalar (número real) $k = -15$

Solución:

Definimos la matriz A B2:D4, seleccionamos las celdas B6:D9 donde aparecerá el resultado.

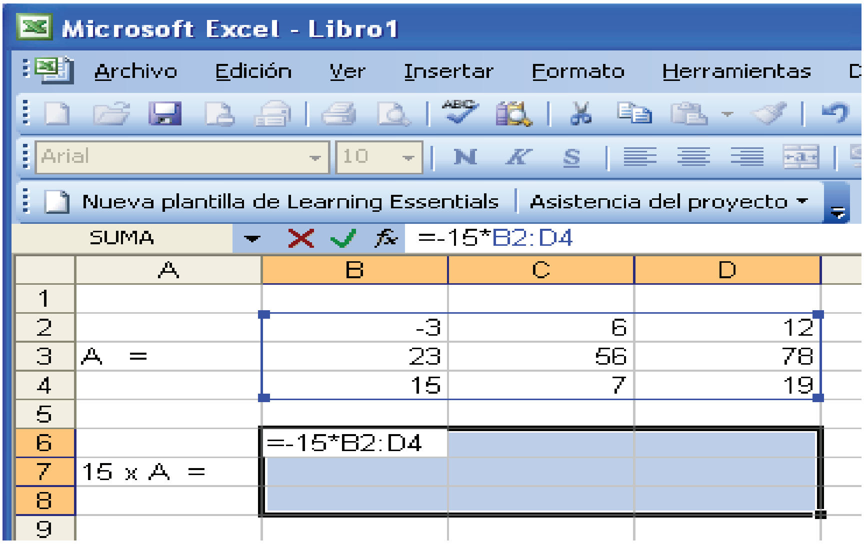


Figura 49.

En la línea de edición de Excel escribimos la fórmula =-15* B6: D9

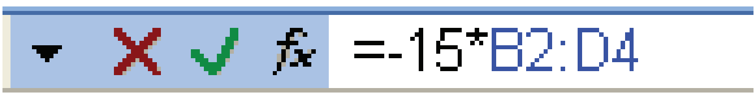


Figura 50.

Ahora, presionamos simultáneamente: **Control, Mayúsculas (shift)** y **Enter** las liberamos y obtenemos el resultado:

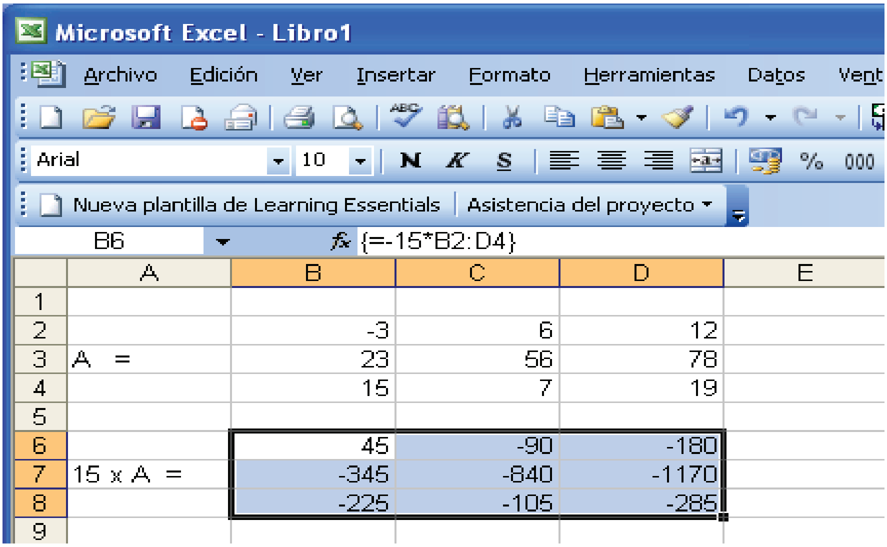


Figura 51.

Multiplicación de matrices

EJEMPLO 14.

Multiplicar las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 12 \\ 23 & 56 & 78 \\ 15 & 7 & 19 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 23 \\ 56 & 17 & 98 \\ 76 & 5 & 43 \end{bmatrix}$$

Solución:

De nuevo escribimos las matrices y sombreamos el espacio del resultado, como en la figura:

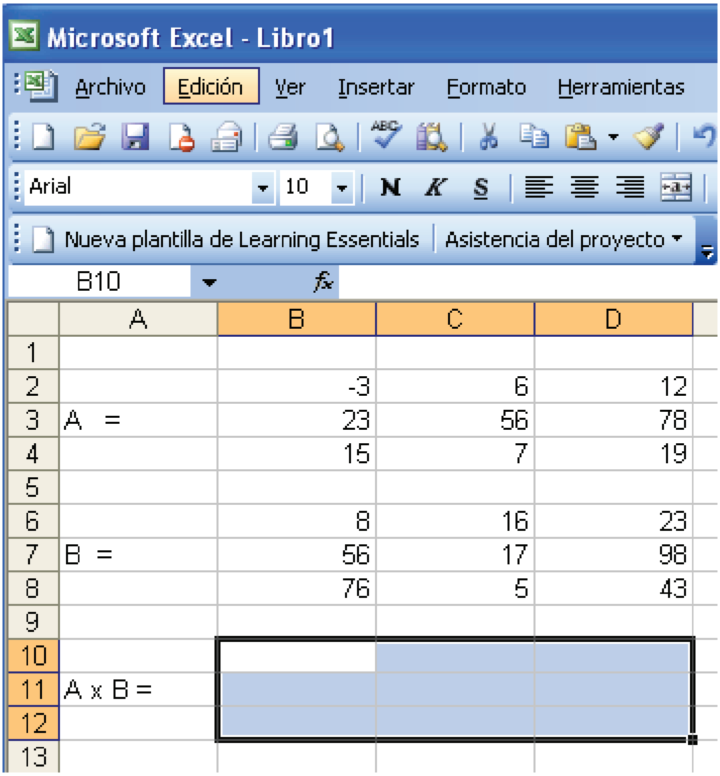


Figura 52.

Para la multiplicación función de Excel MMULT. Esta herramienta se encuentra en insertar función

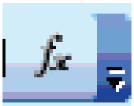


Figura 53.

Damos clic allí y nos aparece la ventana:

Figura 54.

Clic en aceptar y aparece la ventana:

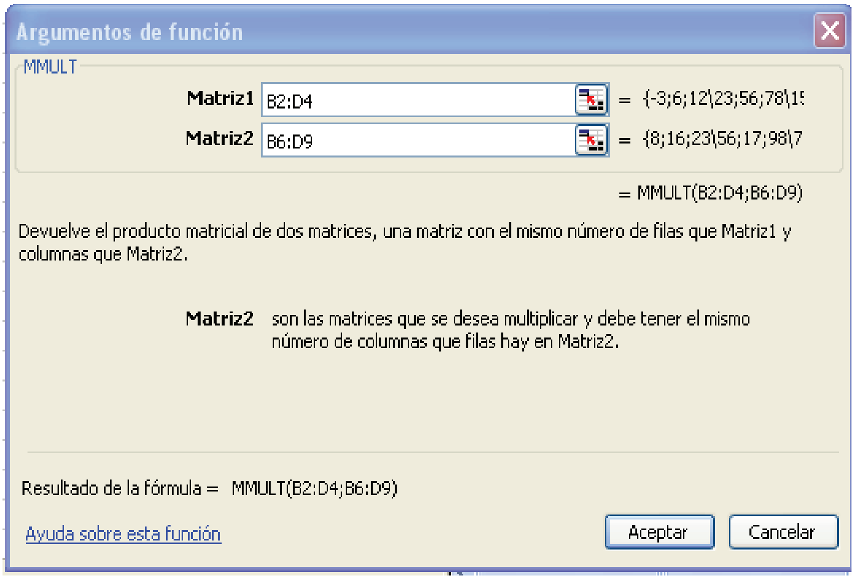


Figura 55.

En ella introducimos las matrices correspondientes en las ventanas:

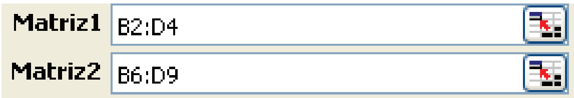


Figura 56.

De nuevo presionamos simultáneamente **Control, Mayúsculas (shift) y Enter** soltamos y obtenemos el resultado:

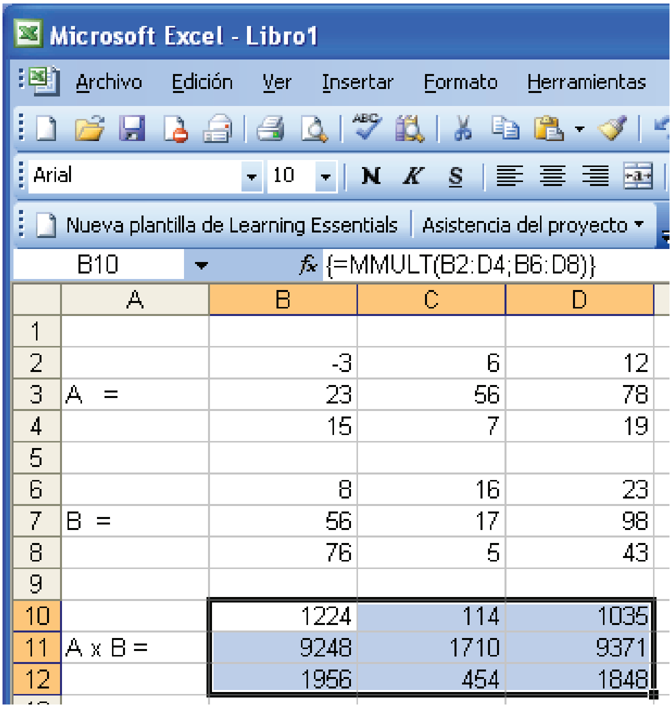


Figura 57.

1.4 DETERMINANTES

EJEMPLO 15.

Calcular el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 35 & 2 \\ 56 & 22 & 12 & -6 \\ 8 & 14 & 89 & 100 \\ 11 & 19 & -25 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Para el cálculo de determinantes utilizamos la función MDETERM. (ver figura 44)

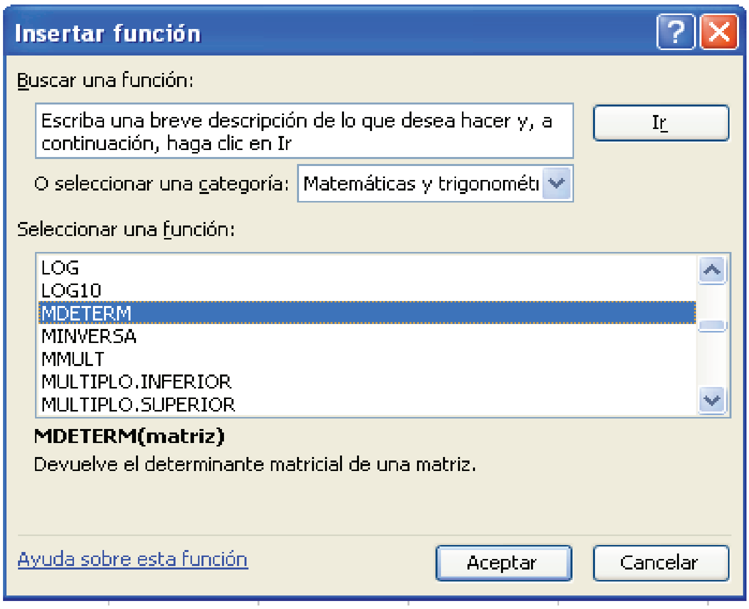


Figura 58.

Clic en aceptar y obtenemos la ventana de la figura 46.

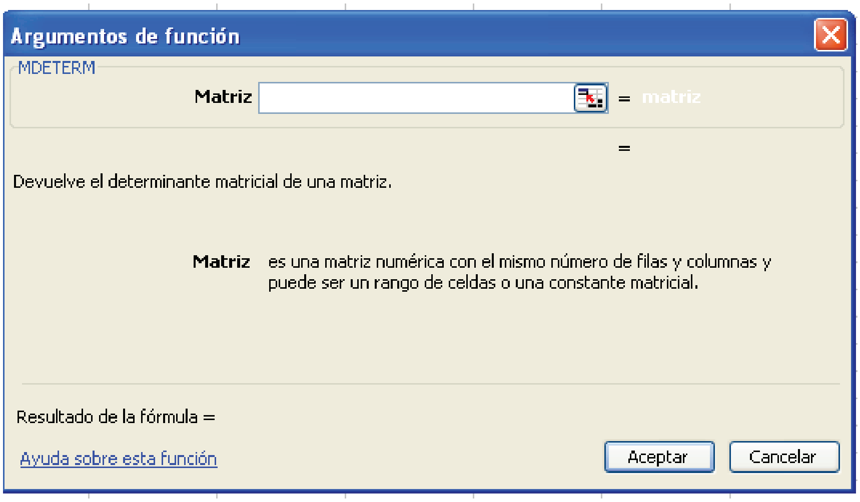


Figura 59.

En el campo Matriz introducimos la matriz a la cual se le va a calcular el determinante.

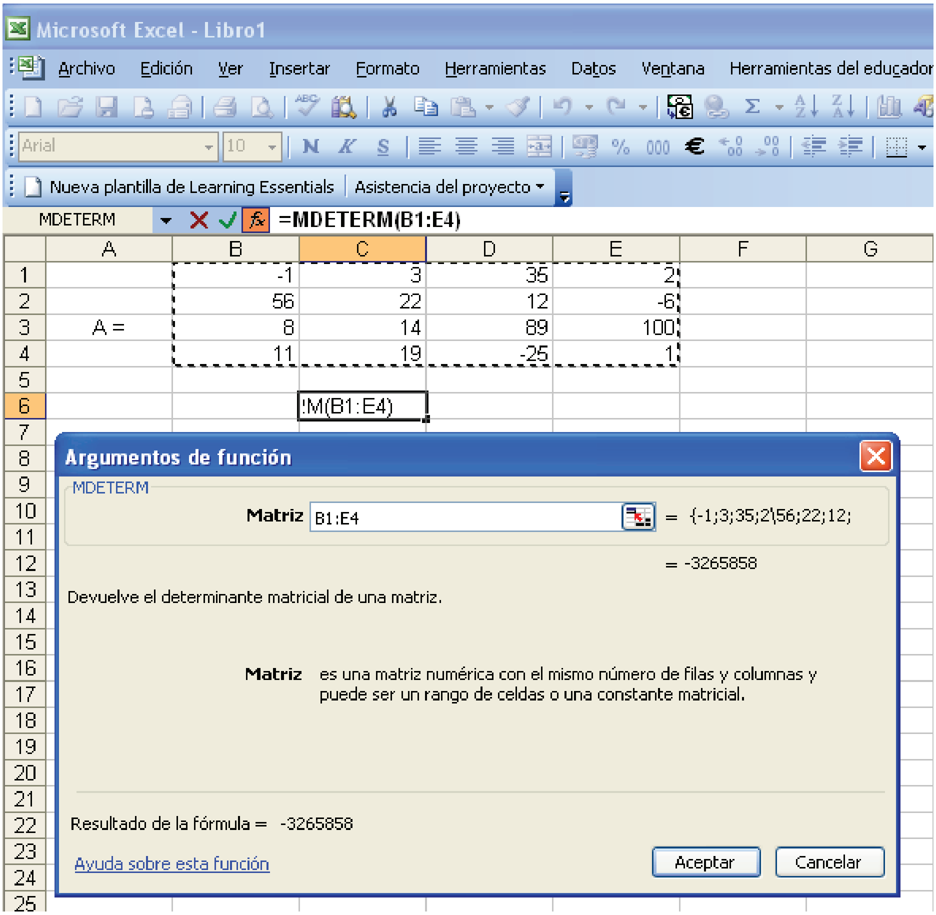


Figura 60.

Ahora, damos Clic en aceptar y obtenemos la solución, como se ve en la figura anterior.

Figura 61.

1.5 MATRIZ INVERSA

EJEMPLO 16.

Calcular la inversa de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -5 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Excel tiene en la función MINVERSA, la herramienta para calcular la inversa de una matriz. (Ver figura 60)

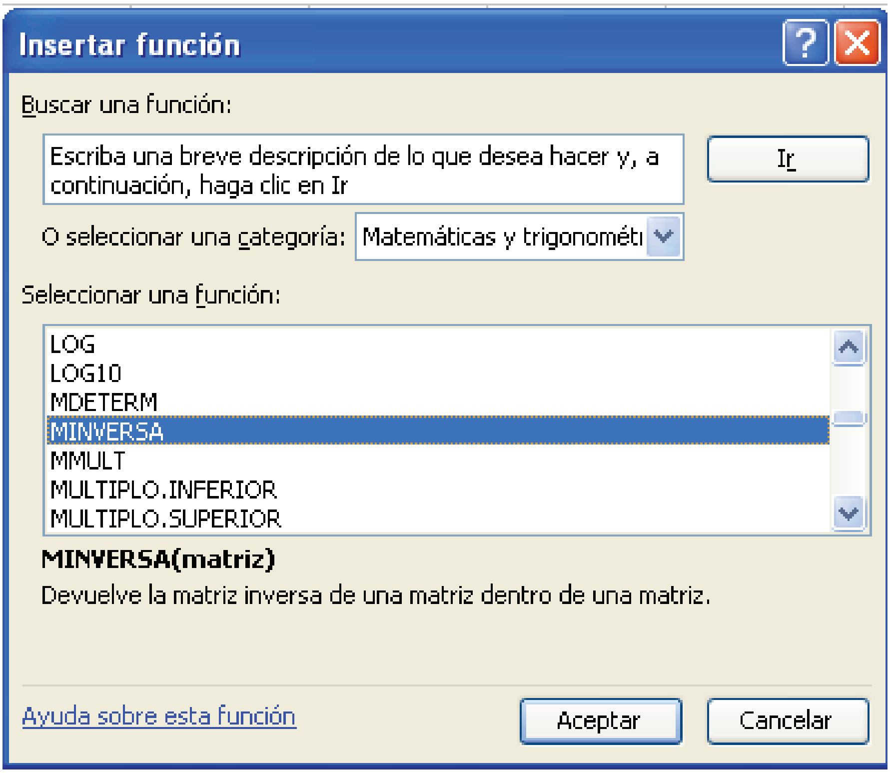


Figura 62.

El procedimiento es similar, escribimos los números de la matriz a calcular en la hoja de Excel.

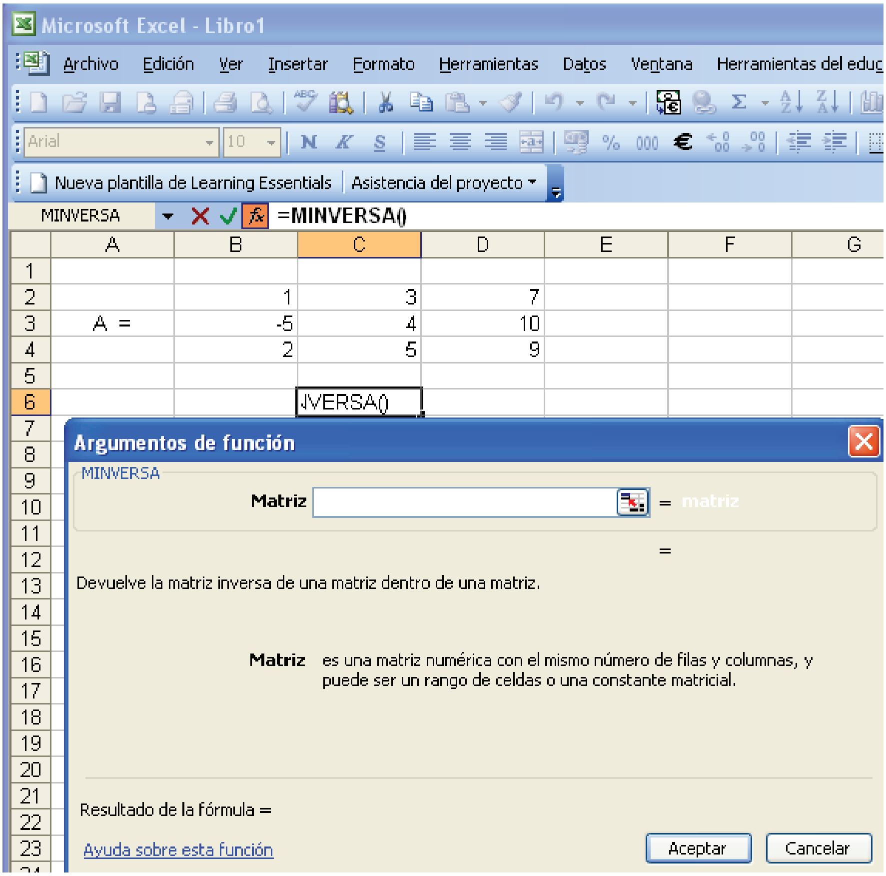


Figura 63.

Debemos señalar un campo del tamaño de A, pues la inversa es de 3 x 3.

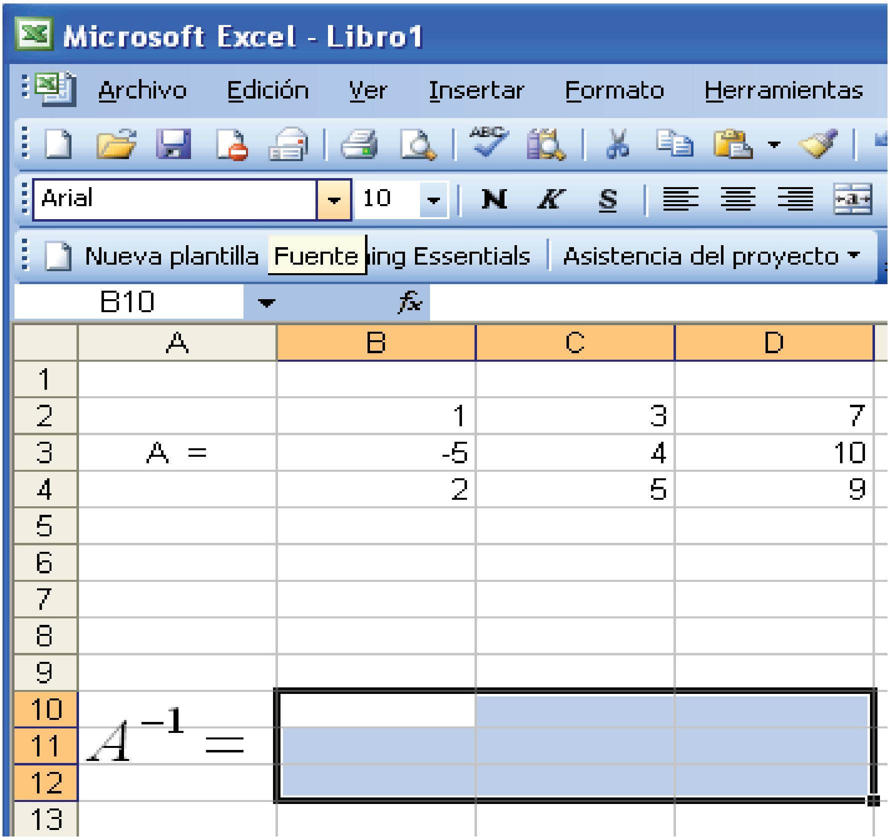


Figura 64.

En el campo, matriz introducimos las coordenadas de la matriz a calcular. De nuevo presionamos simultáneamente **Control, Mayúsculas (shift) y Enter**.

Soltamos y obtenemos el resultado:

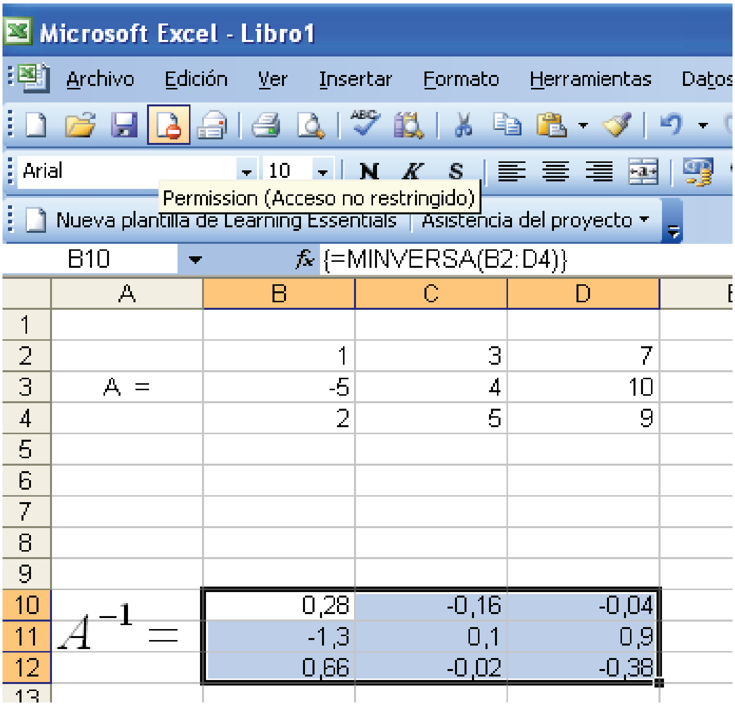


Figura 65.

1.6 SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES MEDIANTE LA REGLA DE CRAMER.

EJEMPLO 17.

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+3y+z=3 \\ x+2y+z \ =1 \\ -x+4y \quad =-2 \end{cases}$$

Solución:

Recordemos que la regla de **Cramer** tiene como denominador el determinante de coeficientes de las incógnitas. En cada incógnita al momento del cálculo en su columna se reemplaza por el término independiente.

Escribimos las matrices de cada incógnita en la hoja de Excel.

$$x = \frac{\det A}{\det \Delta} \qquad y = \frac{\det B}{\det \Delta} \qquad z = \frac{\det C}{\det \Delta}$$

Determinante Δ es la matriz de coeficientes.

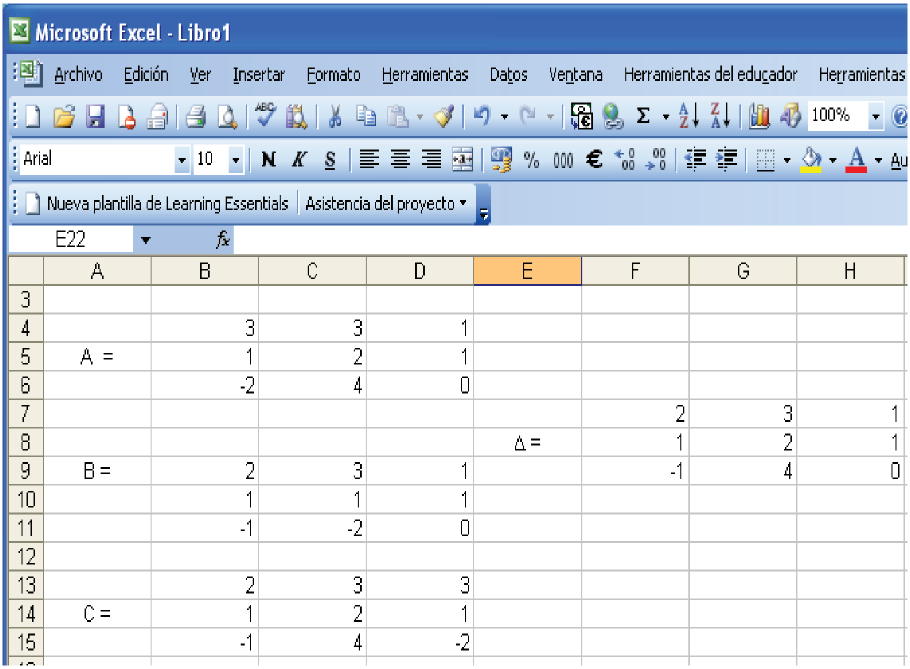


Figura 66.

Calculamos utilizando el comando MDETERM. Los valores son:

Para ***x*** escribimos: =MDETERM(B4:D6)/MDETERM(F8:H10)

Para ***y*** escribimos: =MDETERM(B9:D11)/MDETERM(F8:H10)

Para ***z*** escribimos: =MDETERM(B13:D15)/MDETERM(F8:H10)

Figura 67.

Ahora resolvemos, el sistema y obtenemos:

$$x = 2$$
$$y = 0$$
$$z = -1$$

1.7 SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Para solucionar triángulos, debemos recurrir a la Ley de Cosenos y Senos. Para ello se debe construir en Excel una hoja con las siguientes características: (ver figura 67)

Una simulación es la siguiente:

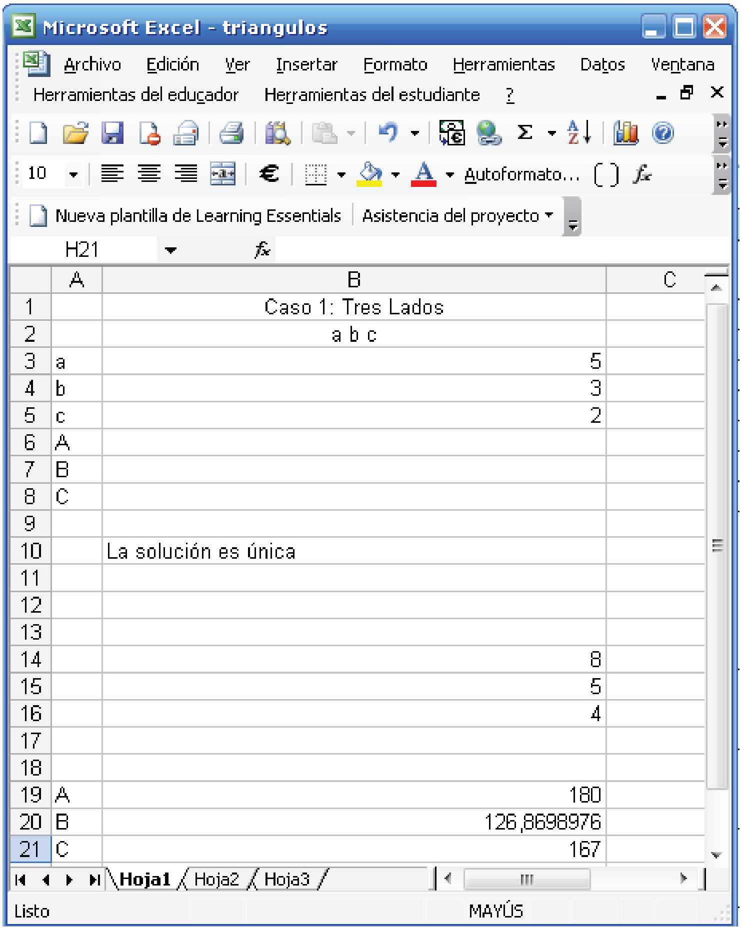


Figura 68.

De igual manera para los demás casos.

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Caso 1 Tres lados**	**Caso 2 Dos ángulos y el lado adyacente**	**Caso 3 Dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos**	**Caso 4 Dos lados y el ángulo que forman**	**Caso 5 Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos**	
2		a b c	A B c	A B a	a b C		a b A
3	a	6		6	6		6
4	b	5			5		5
5	c	4	3				
6	A		88	88			88
7	B		63	63			
8	C				37		
9		=SI(O(B3>(B4+B5);B4>(B3+B5);B5>(B3+B4));"NO HAY SOLUCIÓN";" SOLUCIÓN ÚNICA")	=SI(C6+C7>180;"NO HAYSOLUCIÓN";"SOLUCIÓN ÚNICA")	=SI(D6+D7>180;"NO HAY SOLUCIÓN";"SOLUCIÓN ÚNICA")	SOLUCIÓN ÚNICA	=SI(G4*SENO(RADIANES(G6))>G3;"NO HAY SOLUCIÓN";SI(G3<G4;"DOSSOLUCIONES";" SOLUCIÓN ÚNICA"))	
10	a	=B3	=C5*SENO(RADIANES(C6))/SENO(RADIANES(C15))	=D3	=E3	=G3	=G3
11	b	=B4	=C5*SENO(RADIANES(C7))SENO(RADIANES(C15))	=SENO(RADIANES(D7))*D3/SENO(RADIANES(D6))	=E4	=G4	=G4
12	c	=B5	=C5	=SENO(RADIANES(D15))*D3/SENO(RADIANES(D6))	=RAIZ(E3*E3+E4*E4-2*E3*E4*COS(RADIANES(E8)))	=G3*SENO(RADIANES(F15))/SENO(RADIANES(G6))	=G3*SENO(RADIANES(G15))/SENO(RADIANES(G6))
13	A	=GRADOS(ACOS((B3*B3-B4*B4-B5^2)/(-2*B4*B5)))	=C6	=D6	=GRADOS(ASENO(E3*SENO(RADIANES(E8))/E12))	=G6	=G6
14	B	=GRADOS(ACOS((B4*B4-B5*B5-B3*B3)/(-2*B5*B3)))	=C7	=D7	=180-E13-E15	=GRADOS(ASENO(SENO(RADIANES(G6))*G4/G3))	=SI(G13<F14;180-F14;" no vale")
15	C	=180-B13-B14	=180-C13-C14	=180-D13-D14	=E8	=180-F13-F14	=180-G13-G14

Figura 69.

1.8 CÁLCULO DIFERENCIAL

El límite de una función y su aproximación

Para conocer el concepto de límite podemos hallar su valor en cercanías y mirar qué ocurre cada vez. Todos sabemos que esto manualmente es muy tedioso, pero gracias a Excel se puede hacer de una manera fácil y rápida.

EJEMPLO 18.

Dada la siguiente función: $f(x) = \dfrac{6x^2 - 10x - 4}{14x - 28}$

Observar que ocurre cuando x está cerca de 2; es decir $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Para valores de x próximos a 3; ejemplo: $f(1{,}87), f(1{,}9), f(1{,}91), f(1{,}92), \ldots$

Y para: $f(2{,}1), f(2{,}09), f(2{,}08), \cdots$ Para ello vamos a construir una hoja de Excel.

1	A	B	C	D	E
2	Límite de Funciones (una aproximación)				
3	a	r			1
4	2				
5	*x = a + h*	*y = f(a+h)*			
6	= A4 –B4		=B6-E$1		
7	= A6+B$4/30				

Figura 70.

¿Qué tenemos?

En la celda A4 introdujimos el valor de radio del intervalo $[a - r, a + r]$ donde vamos a aproximar los valores. Ejemplo si hacemos $r = 0{,}1$; es decir vamos a calcular valores de *f(x)* desde 2-*0,1 = 1.9*. Lo haremos para 30 valores a la izquierda de *x = 2* y 30 a la derecha. Luego el incremento en *x* para pasar de cada punto al siguiente es: r/*30*

El primer valor de x que vamos a hallar para $f(x)$ es $x = a - r$, para lo cual escribimos $= A4 - B4$ en la celda A6. Los demás valores se obtienen mediante el incremento $r/30$, es decir $B6/30$. Luego para que se pueda copiar hacia abajo sin tropiezos la serie escribimos: A6 + B$4/30, seleccionamos desde A7 hasta A54 con Ctrl. + J llenamos hacia abajo. Cada vez que cambiemos los valores de a y r en A4 y B4 actualizamos los valores de toda la columna.

En B6 se introduce la función y llenamos hacia abajo. Para nuestro caso tenemos:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 10x - 4}{14x - 28} \qquad = (6*A6^2-10*A6-4)/ (14*A6-28)$$

Podemos cambiar la variable A6 por x que es la que siempre trabajamos, para esto situamos el cursor en A6 y procedemos de la siguiente manera:

en la barra de herramientas damos clic en Insertar y aparece:

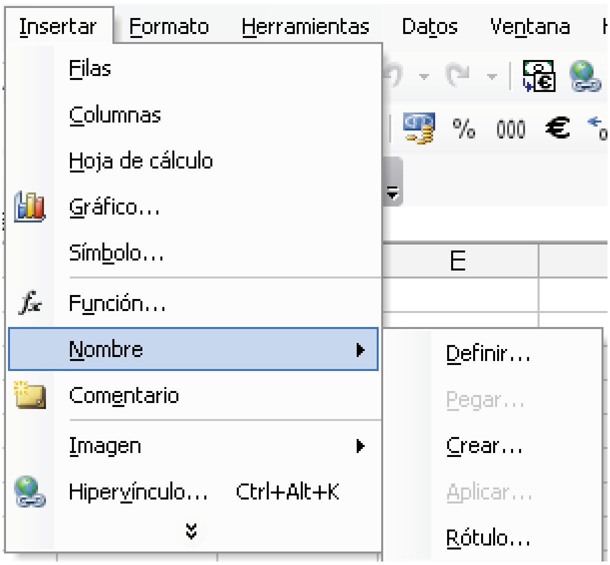


Figura 71.

Insertar – Nombre – Definir y aparece el cuadro de diálogo:

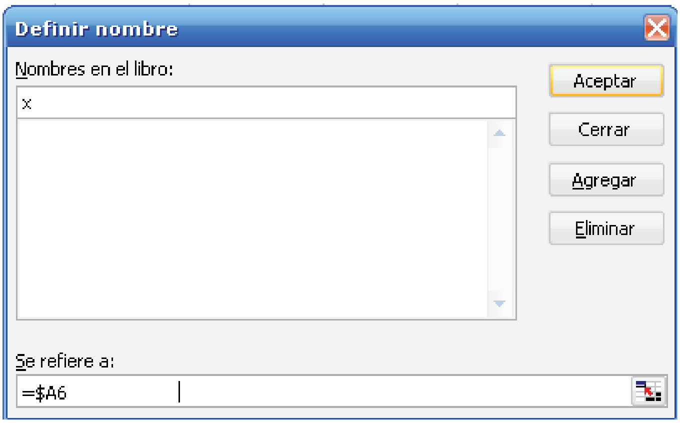
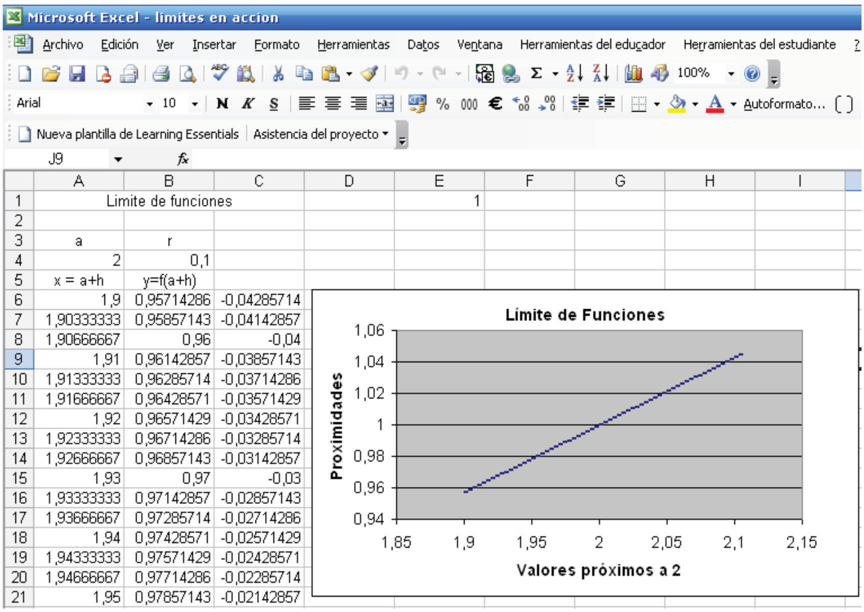


Figura 72.

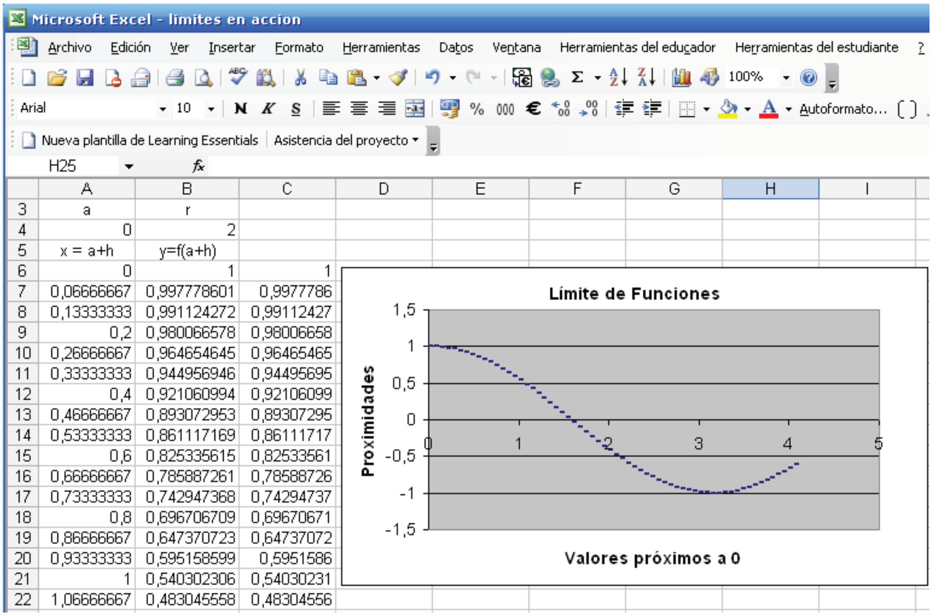
En el primer campo escribimos ***x*** en el último campo escribimos =$A6 como aparece en la figura 60. El signo $ nos permite actualizar a *x* al llenar hacia abajo. Podemos ahora trabajar con la ecuación: = (6*A6^2-10*A6-4)/ (14*A6-28). En la celda C6 escribimos = *B6- E$1* y llenamos hacia abajo, comparemos los valores con el valor límite que está en E1. Una simulación es la siguiente:



	A	B	C	D	E
1	Limite de funciones				1
2					
3	a	r			
4	2	0,1			
5	x = a+h	y=f(a+h)			
6	1,9	0,95714286	-0,04285714		
7	1,90333333	0,95857143	-0,04142857		
8	1,90666667	0,96	-0,04		
9	1,91	0,96142857	-0,03857143		
10	1,91333333	0,96285714	-0,03714286		
11	1,91666667	0,96428571	-0,03571429		
12	1,92	0,96571429	-0,03428571		
13	1,92333333	0,96714286	-0,03285714		
14	1,92666667	0,96857143	-0,03142857		
15	1,93	0,97	-0,03		
16	1,93333333	0,97142857	-0,02857143		
17	1,93666667	0,97285714	-0,02714286		
18	1,94	0,97428571	-0,02571429		
19	1,94333333	0,97571429	-0,02428571		
20	1,94666667	0,97714286	-0,02285714		
21	1,95	0,97857143	-0,02142857		

Figura 73.

Una simulación para coseno es la siguiente:



	A	B	C
3	a	r	
4	0	2	
5	x = a+h	y=f(a+h)	
6	0	1	1
7	0,06666667	0,997778601	0,9977786
8	0,13333333	0,991124272	0,99112427
9	0,2	0,980066578	0,98006658
10	0,26666667	0,964654645	0,96465465
11	0,33333333	0,944956946	0,94495695
12	0,4	0,921060994	0,92106099
13	0,46666667	0,893072953	0,89307295
14	0,53333333	0,861117169	0,86111717
15	0,6	0,825335615	0,82533561
16	0,66666667	0,785887261	0,78588726
17	0,73333333	0,742947368	0,74294737
18	0,8	0,696706709	0,69670671
19	0,86666667	0,647370723	0,64737072
20	0,93333333	0,595158599	0,5951586
21	1	0,540302306	0,54030231
22	1,06666667	0,483045558	0,48304556

Figura 74.

Recta tangente a una curva

En Excel podemos obtener la gráfica de la función y su tangente. El procedimiento es el siguiente:

Debemos en una hoja de Excel construir una base de datos.

	A	B	C
1	RECTA TANGENTE A UNA CURVA		
2	*x* inicial	*x* final	incremento
3			=(B3-A3)/50
	a	*f(a)*	*f'(a)*
5			
6	*x*	*f(x)*	*h(x)*
7	=A3		
8	=A7+C$3		

Figura 75.

Observemos que en las celdas ***A3*** y ***B3*** vamos a introducir los extremos del intervalo para la representación ejemplo: (-2,5, 3,5). 50 puntos es suficiente para la representación. En **C3** introducimos la expresión ***=(B3-A3)/50***. Ahora desde la celda ***A7*** hasta la celda ***A57*** se introducen los 50 valores. Vemos que el primer valor coincide con ***x*** inicial; para esto introducimos en ***A7*** la siguiente expresión ***=A3***. Cada valor siguiente será igual al anterior más el incremento dado por ***C3***. Es suficiente con hacer: ***=A7+C3*** en ***A8*** luego arrastramos hacia abajo para rellenar hasta ***A57.*** Para evitar cambios en la referencia C3 que es el incremento utilizamos el signo pesos ($).

Por tanto:

Escribimos ***=A7+C$3*** en la celda *A8*, debemos seleccionar desde A8 hasta *A57*, el último valor coincide con x final.

EJEMPLO 19.

Para la función: $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x$

a) Trazar el gráfico
b) Trazar el gráfico de la recta tangente a la curva.

Solución:

En la celda B7 introducimos la ecuación de la función:

=2*A7^3-A7^2-2*A7 y llenamos hacia abajo hasta llegar a B57. Ahora; si no queremos utilizar esta forma de escribir podemos cambiar A7 por x que es la que nos gusta utilizar. Para ello nos ubicamos en la celda A7 y en la barra de herramientas damos clic en Insertar y aparece:

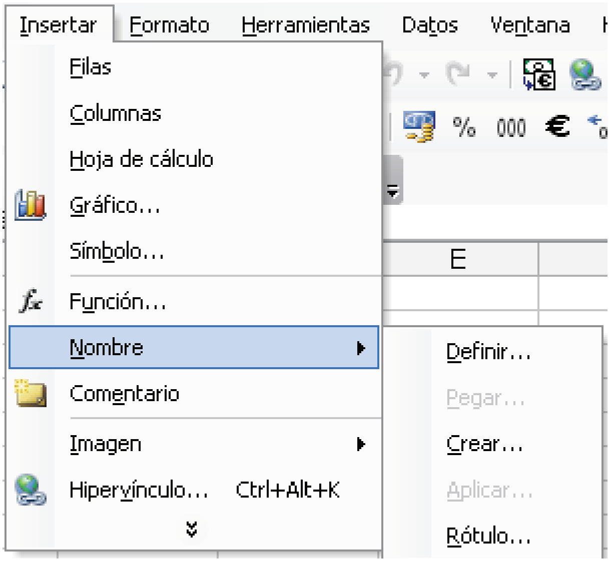


Figura 76.

Insertar – Nombre – Definir y aparece el cuadro de diálogo:

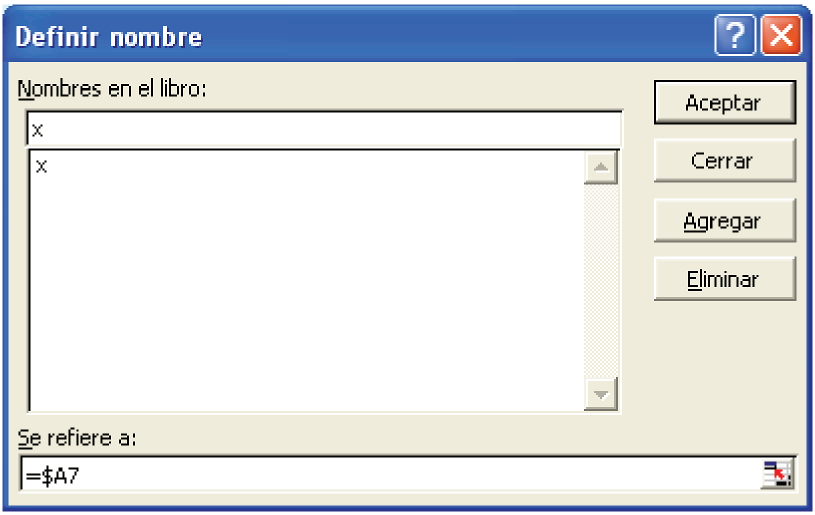


Figura 77.

En el primer campo escribimos x en el último campo escribimos =$A7 como aparece en la figura 60. El signo $ nos permite actualizar a x al llenar hacia abajo.

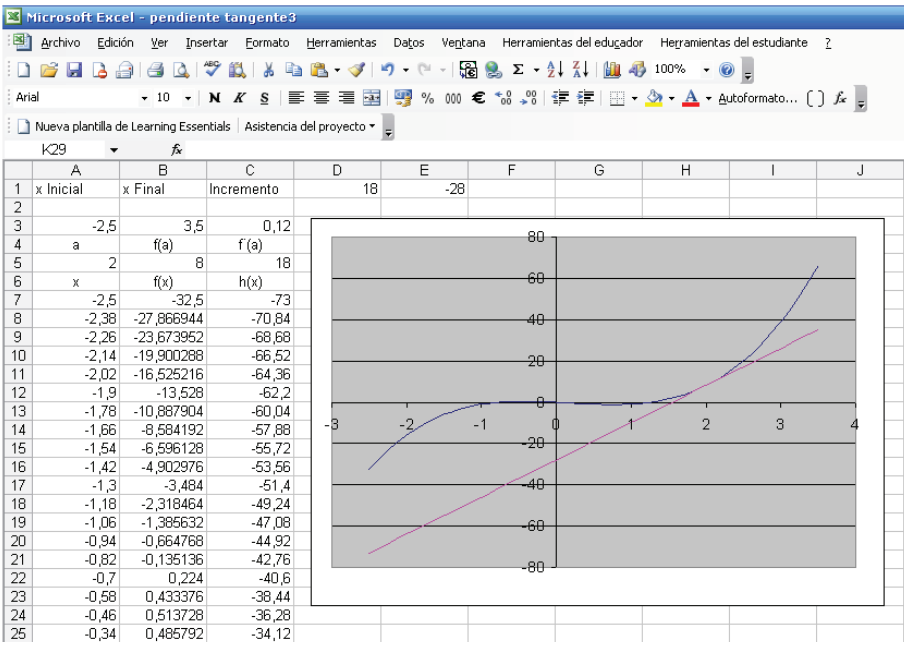
Podemos ahora trabajar con la ecuación: *=2*x^3-x^2-2*x* y arrastrando el cursor sostenido hacia abajo llenamos con la nueva variable hasta B57. En la celda A58 escribimos =A5 y llenamos hacia abajo desde B7 hasta B58 y no hasta B57. Introducimos =B58 en la celda B5.

Para hallar la pendiente de la tangente debemos utilizar la derivada, por tanto esta la introducimos en la celda **C5.** Dicha derivada es: =6*x^2-2*x-2.

Es importante que observemos que el valor de x corresponde siempre al primer valor de la fila de la columna A. En D1 escribimos =C5 y en E1 escribimos =B5-C5*A5 que corresponde a la ecuación de la recta tangente. En la celda C incluiremos los puntos de la recta.

Esto lo podemos lograr mediante la expresión ***=C$5*x+$G$1*** y llenamos hacia abajo hasta la celda C57. Para graficar la curva y su tangente procedemos como lo hicimos graficando funciones. Debemos si tener presente que debemos seleccionar las tres columnas de números. Como aparece en la figura 61.

Una simulación es la siguiente:



	A	B	C	D	E
1	x Inicial	x Final	Incremento	18	-28
2					
3	-2,5	3,5	0,12		
4	a	f(a)	f´(a)		
5	2	8	18		
6	x	f(x)	h(x)		
7	-2,5	-32,5	-73		
8	-2,38	-27,866944	-70,84		
9	-2,26	-23,673952	-68,68		
10	-2,14	-19,900288	-66,52		
11	-2,02	-16,525216	-64,36		
12	-1,9	-13,528	-62,2		
13	-1,78	-10,887904	-60,04		
14	-1,66	-8,584192	-57,88		
15	-1,54	-6,596128	-55,72		
16	-1,42	-4,902976	-53,56		
17	-1,3	-3,484	-51,4		
18	-1,18	-2,318464	-49,24		
19	-1,06	-1,385632	-47,08		
20	-0,94	-0,664768	-44,92		
21	-0,82	-0,135136	-42,76		
22	-0,7	0,224	-40,6		
23	-0,58	0,433376	-38,44		
24	-0,46	0,513728	-36,28		
25	-0,34	0,485792	-34,12		

Figura 78.

La función derivada

Una aproximación a la derivada está dada por el cociente:

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para lo anterior vamos a elaborar una hoja de cálculo en Excel para calcular los valores de una función dada. Vamos a utilizar unos 50 puntos en los que dividiremos un intervalo [a, b]. Luego representaremos gráficamente la función y su *f'(x)* en dicho intervalo.

CONSTRUCCIÓN DE LA HOJA

Abrimos una hoja de Excel e introducimos la siguiente información.

	A	B	C	D	E
1	FUNCION DERIVADA				
2	*x* inicial	-3			
3	*x* final	3			
4	*h*	=(B3-B2)/50			
5	*x*	*f(x)*	*f'(x)*		
6	=B2				
7	=A6+B$4				

Figura 79.

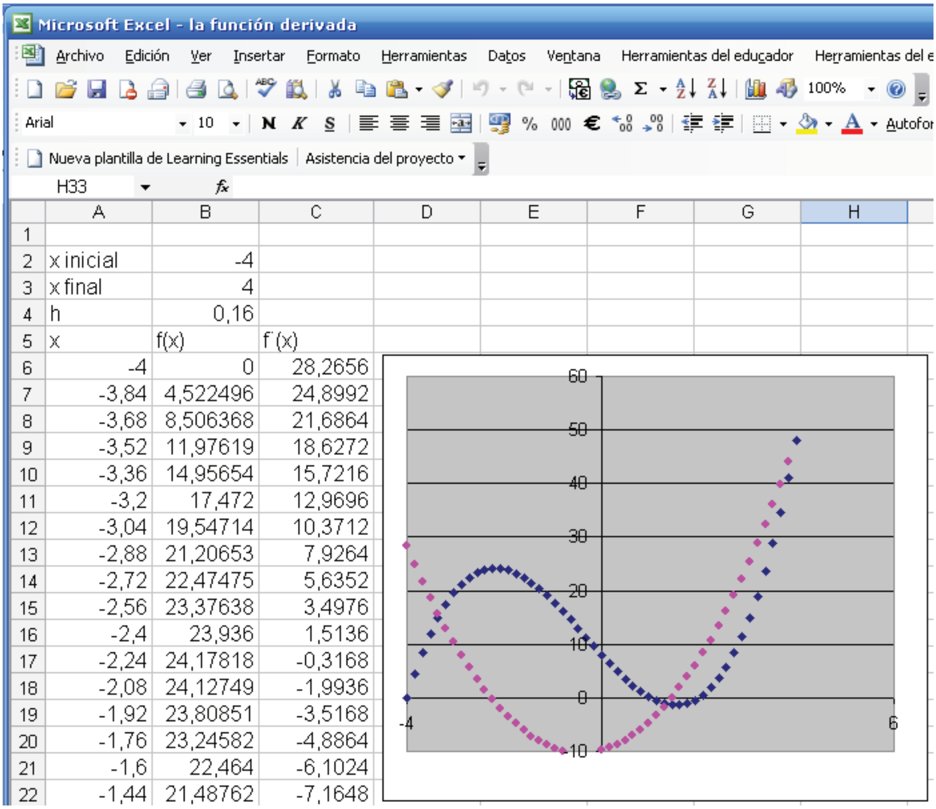
En las celdas B2 y B3 introducimos los extremos a y b del intervalo [a,b]

Utilizaremos [–4, 4] y lo dividiremos en 50 partes, cada una tendrá de amplitud (B3-B2)/50. Este valor de h aparecerá en la celda B4 y se actualizará automáticamente cada vez que se modifique la *x* inicial o final.

Tendremos para nuestro caso la función $f(x) = (x+4)(x-2)(x-1)$

Ahora copiamos desde A6 hasta alcanzar los 50 valores de *x* es allí donde evaluaremos la función. Para el primer valor hacemos = B2 y será el valor de x inicial. Los demás valores los encontramos con $= A6 + B4$ y copiamos la fórmula para los 50 valores. Nos damos cuenta que es el último valor porque debe ser el valor del último extremo del intervalo, para nuestro caso es *4*.

Una simulación es la siguiente:



	A	B	C
1			
2	x inicial	-4	
3	x final	4	
4	h	0,16	
5	x	f(x)	f´(x)
6	-4	0	28,2656
7	-3,84	4,522496	24,8992
8	-3,68	8,506368	21,6864
9	-3,52	11,97619	18,6272
10	-3,36	14,95654	15,7216
11	-3,2	17,472	12,9696
12	-3,04	19,54714	10,3712
13	-2,88	21,20653	7,9264
14	-2,72	22,47475	5,6352
15	-2,56	23,37638	3,4976
16	-2,4	23,936	1,5136
17	-2,24	24,17818	-0,3168
18	-2,08	24,12749	-1,9936
19	-1,92	23,80851	-3,5168
20	-1,76	23,24582	-4,8864
21	-1,6	22,464	-6,1024
22	-1,44	21,48762	-7,1648

Figura 80.

2

Estadística

2. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Se dedica a describir las características existentes en un conjunto de datos llamado *muestra*. La estadística descriptiva permite la organización de datos a través de tablas y representaciones gráficas. Analizar los datos obtenidos mediante medidas de tendencia central y dispersión. Cuando hay una buena representación muestral de la población podemos inferir sus características.

DATOS NO AGRUPADOS

Se denominan datos no agrupados aquellos que son menores a 25 datos.

2.1 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

MEDIA O PROMEDIO

La media $\bar{x}$ de datos no agrupados se calcula sumando todos los datos y dividiendo este valor pos el número total de datos. Veamos mediante un ejemplo:

Hallar la media aritmética de los siguientes datos: 4, 6, 8, 10, 12, 13,15

$$\bar{x} = \frac{4+6+8+10+12+13+15}{7} = 9.71$$

Veamos tenemos 7 datos los sumamos y luego dividimos entre siete y así obtuvimos el resultado de 9.71.

En general si tenemos: $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_n}{n}$$

$\bar{x}$ Significa media muestral, y se lee x con barra.
x indica un valor específico

$\sum$ Es la letra griega sigma que indica la operación de sumar el conjunto de datos dado.

En Excel se utiliza la función **PROMEDIO** cuya sintaxis es:

=PROMEDIO(a, b, c,...,n) que calcula el promedio de los números a, b, c,…,n

Veamos el procedimiento mediante un ejemplo.

EJEMPLO 20.

Calcular la media de los números: 4, 6, 8, 10, 12, 13,15

Solución:

Damos clic en  y nos abre la ventana:

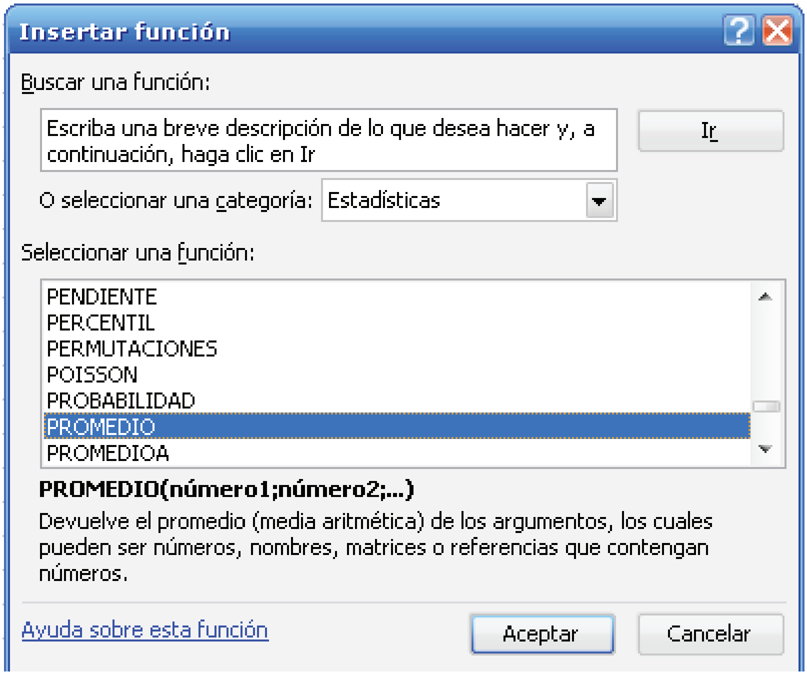


Figura 81.

Aceptamos y aparece el cuadro de diálogo:

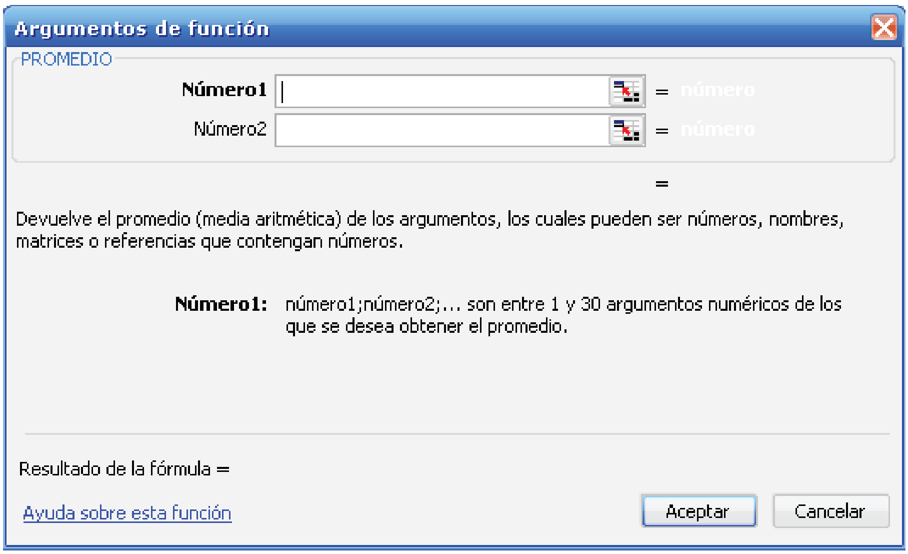


Figura 82.

En el campo que dice número 1 escribimos la serie de datos, simplemente "arrastrando" los datos como muestra la figura 70.

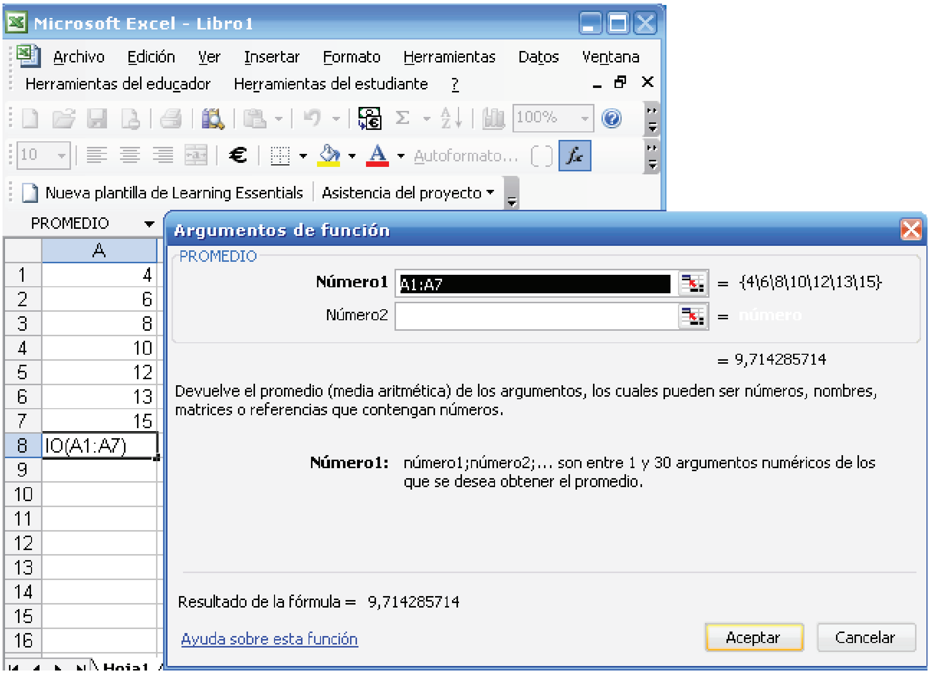


Figura 83.

O escribimos la celda A1:A7.

Aceptamos y obtenemos el resultado: 9,71428571 que es el mismo valor obtenido a mano.

También se conoce como promedio posicional, pues queda exactamente en la mitad del conjunto de datos después de que las observaciones se han colocado en orden ascendente o descendente. La mitad de las observaciones estará por encima de la mediana, la otra mitad estará por debajo de ella.

DATOS NO AGRUPADOS

Cuando el conjunto de datos es impar utilizamos la fórmula matemática

$$PM_d = \frac{n+1}{2}$$ (**PM** $_d$ =Posición de la mediana).

EJEMPLO 21.

Hallar la mediana de los siguientes datos: 55, 57, 56, 59, 58

Solución:

Ordenamos en forma ascendente (de menor a mayor) 55, 56, 57, 58, 59 luego aplicamos PM_d.

$PM_d = \frac{5+1}{2} = 3$ quiere decir que es la posición 3 que corresponde a **57.**

Cuando el número de datos es par ordenamos los mismos y tomamos los datos centrales y hallamos su promedio el resultado de este es la mediana.

EJEMPLO 22.

Dados los datos 1, 2, 3, 6, 7,5 hallar la mediana.

Solución:

Ordenamos los datos: 1, 2, 3, 5, 6, 7 tomamos los datos centrales en este caso 3 y 5.

La Mediana

También se conoce como promedio posicionado, pues queda exactamente en la mitad del conjunto de datos después de que las observaciones se han colocado en orden ascendente o descendente. La mitad de las observaciones estará por encima de la mediana, la otra mitad estará por debajo de ella.

En Excel utilizamos la función MEDIANA, cuya sintaxis es:

=MEDIANA(a,b,c,…n)

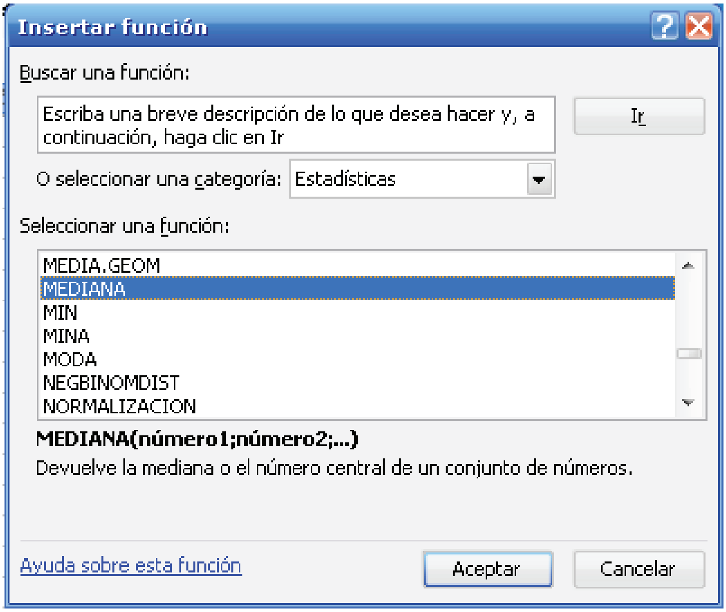


Figura 84.

Aceptamos e introducimos los datos de la misma manera que para la media.

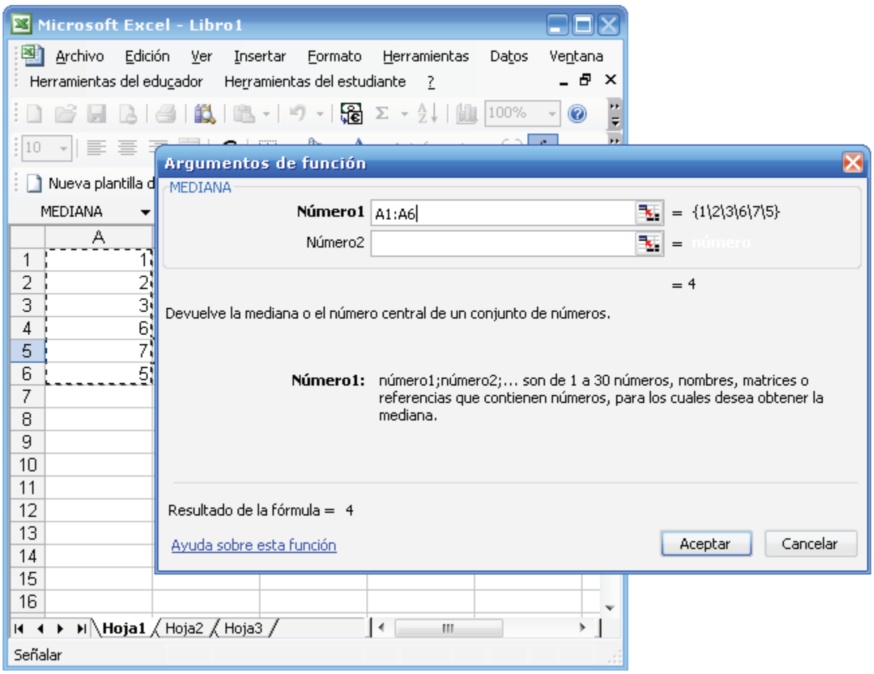


Figura 85.

El resultado es: 

La Moda

Se conoce también con el nombre de módulo, valor prevalente, valor dominante, es la medida de posición que nos da la magnitud del valor que más se repite o se presenta con más frecuencia en un conjunto de datos (es la que tiene mayor frecuencia absoluta). Gráficamente en un polígono de frecuencias es el punto medio del rectángulo más alto.

EJEMPLO 23.

Hallar la moda de los siguientes datos: 3, 4, 7, 9, 12, 4, 7, 7, 10,3
En Excel procedemos de la misma forma que para el cálculo de la media y la mediana.

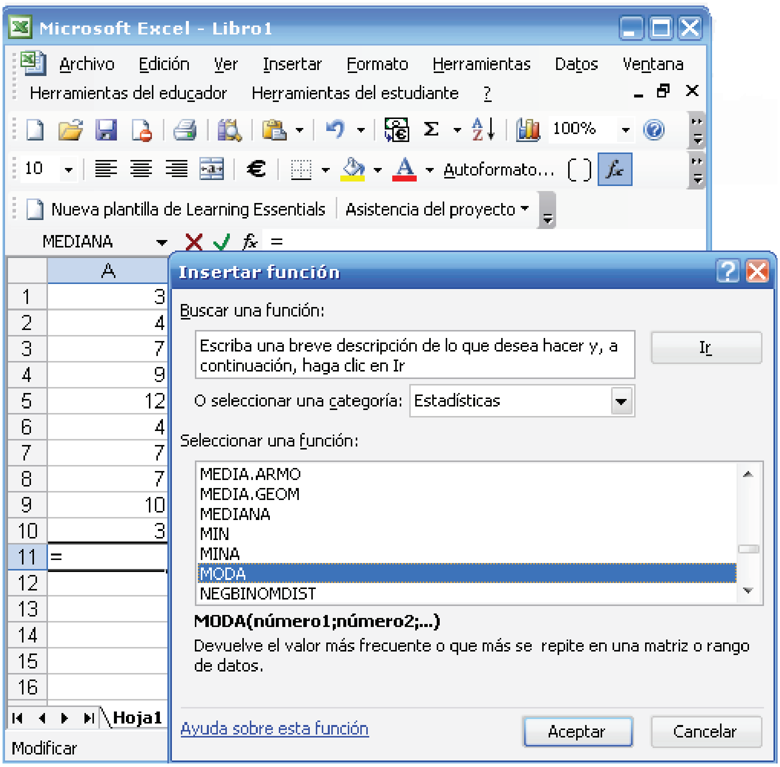


Figura 86.

Aceptamos seleccionamos los datos, para obtener la solución.

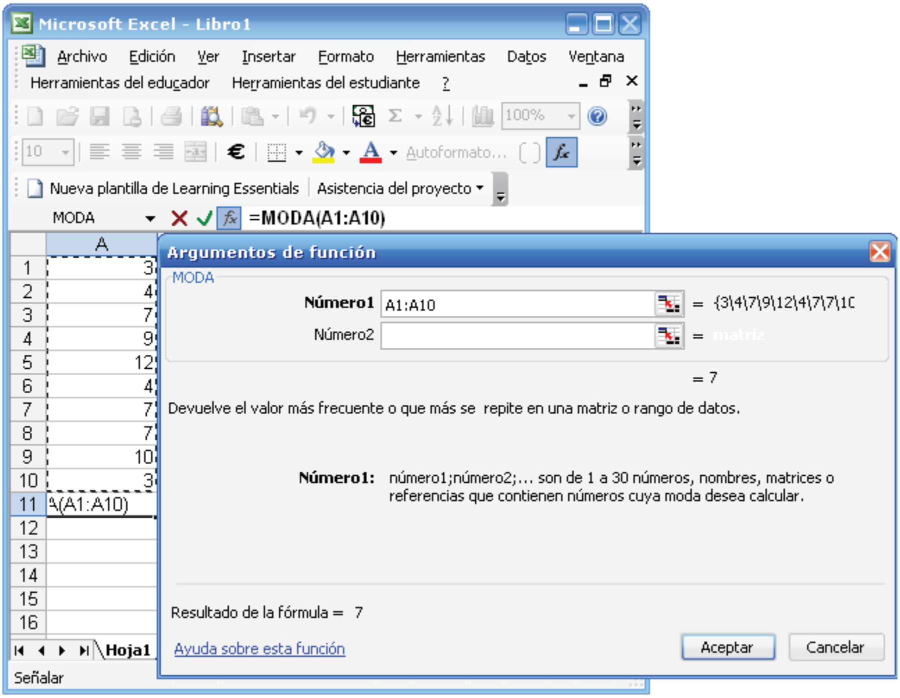


Figura 87.

Por tanto el resultado es: 

Media geométrica

Cuando existe una progresión geométrica (o aproximadamente geométrica) y deseamos obtener el promedio de esta progresión utilizamos la media geométrica.

DATOS NO AGRUPADOS

El promedio geométrico se calcula hallando el producto de todos los elementos de la serie, y luego extrayendo una raíz del orden del número de observaciones consideradas.

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

EJEMPLO 24.

Calcular la media geométrica de los siguientes datos: 4, 6, 8, 5, 10, 7

Solución:

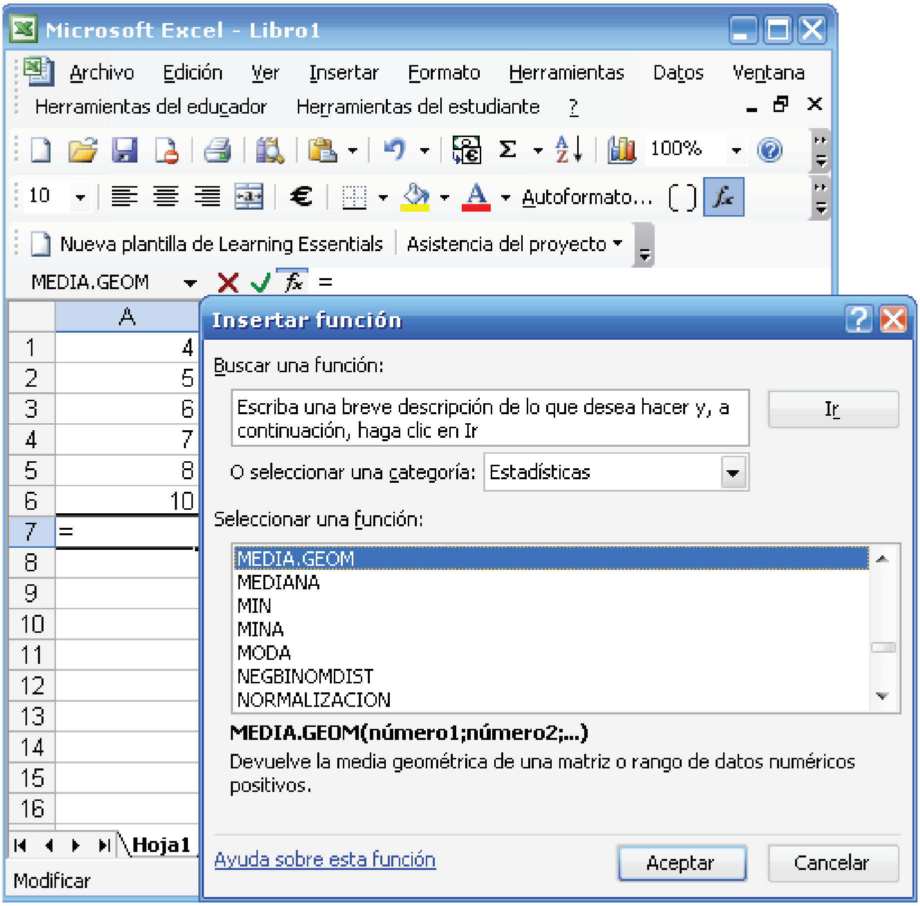


Figura 88.

Aceptamos, señalamos los datos y obtenemos la solución.

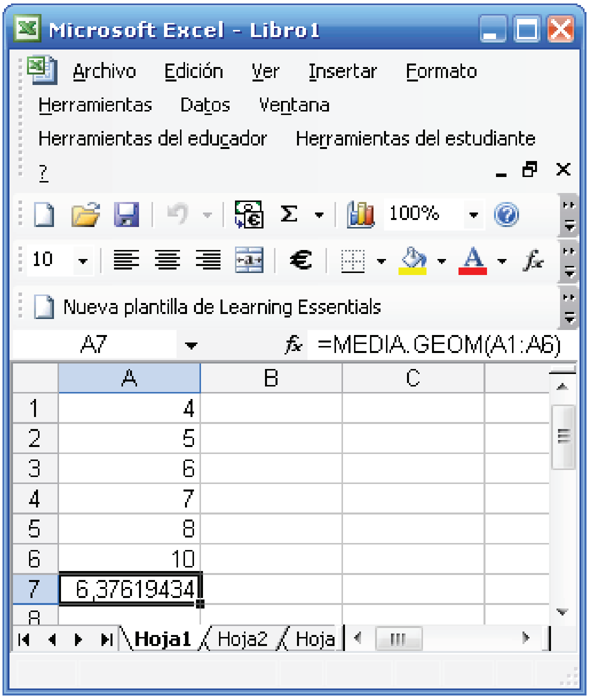


Figura 89.

2.3 MEDIDAS DE VARIABILIDAD

Las medidas de variabilidad o dispersión nos indican que tan cerca de la media se encuentran los datos y podemos evaluar la confiabilidad de la misma.

Desviación media

La desviación media es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones con respecto a la media aritmética.

EJEMPLO 25.

Calcular desviación media de los siguientes datos: 98, 102, 103,104, 105, 107.

Solución:

Procedemos igual que para las medidas anteriores.

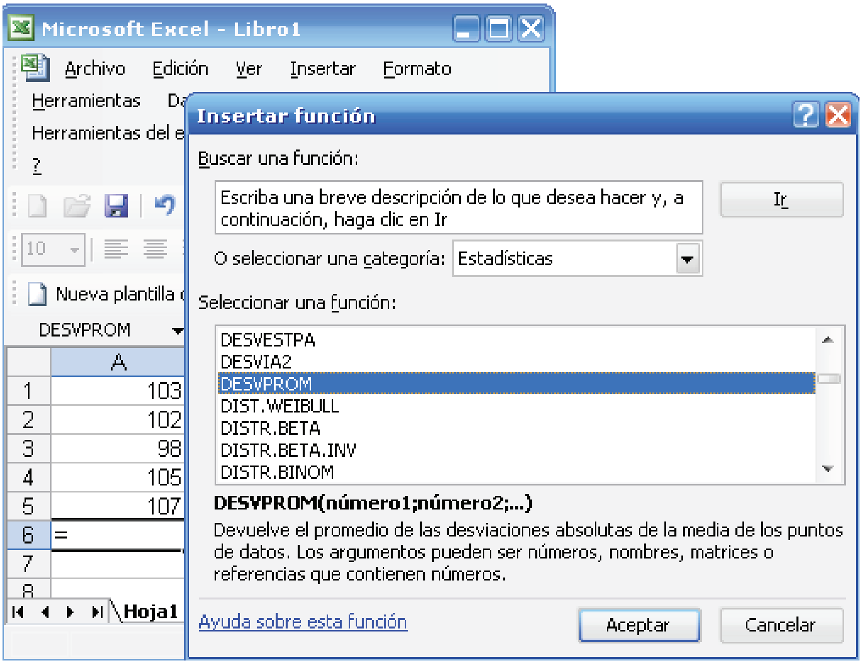


Figura 90.

Aceptamos, arrastramos los datos y obtenemos la solución.

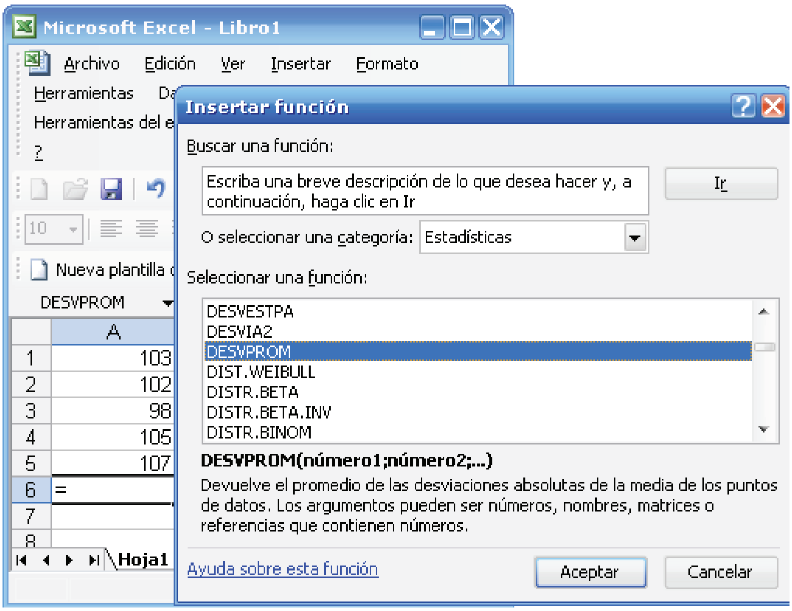


Figura 91.

La solución es: 2,4.

Varianza

Media aritmética de las desviaciones cuadráticas con respecto a la media.

EJEMPLO 26.

Calcular la varianza de los siguientes datos: 10,15, 20, 25, 30.

Solución:

Procedemos de igual manera que para las medidas anteriores, aquí escogemos la función **VAR**, cuya sintaxis es: =VAR(a, b, c,…., n)

El cuadro de diálogo que aparece en la figura 79 nos muestra la función. Aceptamos y “arrastramos” los datos y así obtenemos la solución.

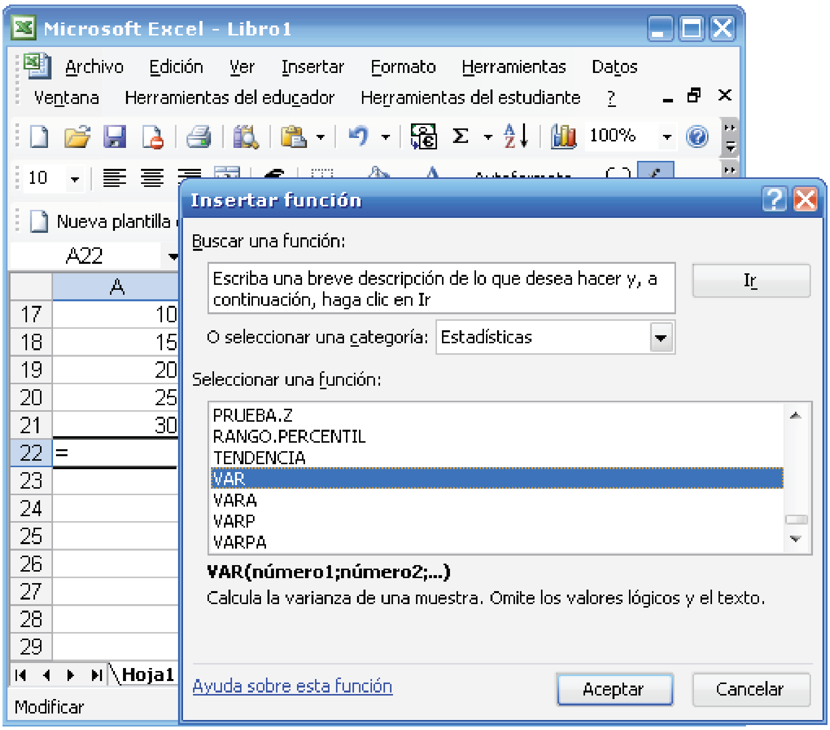


Figura 92.

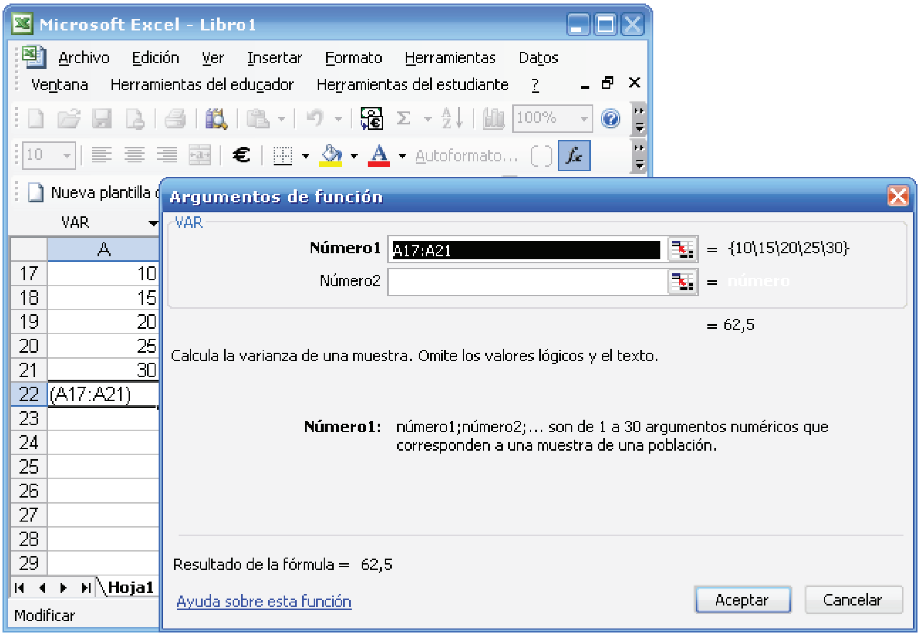


Figura 93.

Como vemos la solución es 62,5.

Desviación estándar

Raíz cuadrada de la varianza.

EJEMPLO 27.

Calcular la desviación estándar de: 10, 15, 20, 25, 30

Solución:

Utilizamos la función DESVEST que calcula la desviación estándar de una muestra y cuya sintaxis es:

$$= \text{DESVEST}(a, b, c, \ldots, n)$$

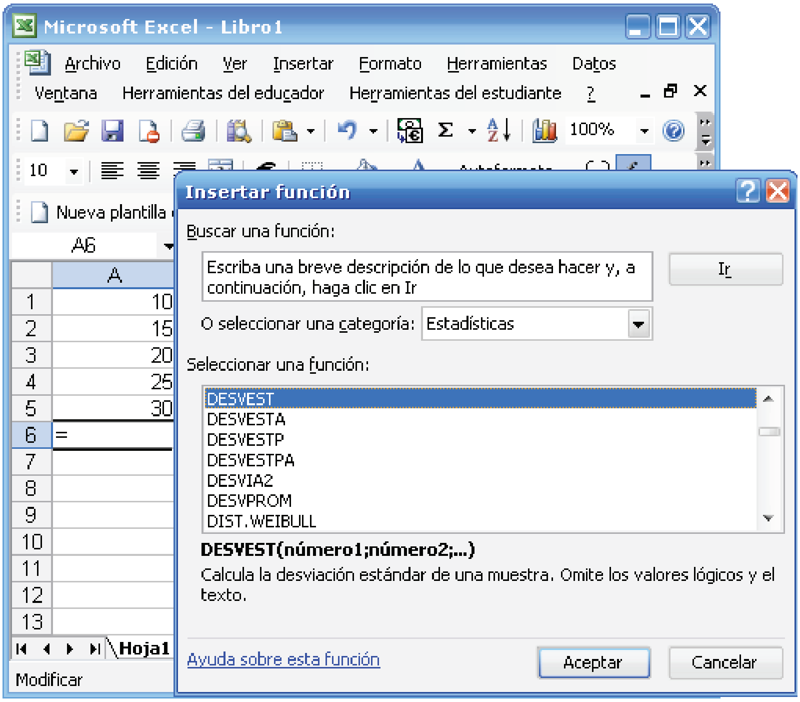


Figura 94.

Aceptamos "arrastramos" los datos y obtenemos la solución.

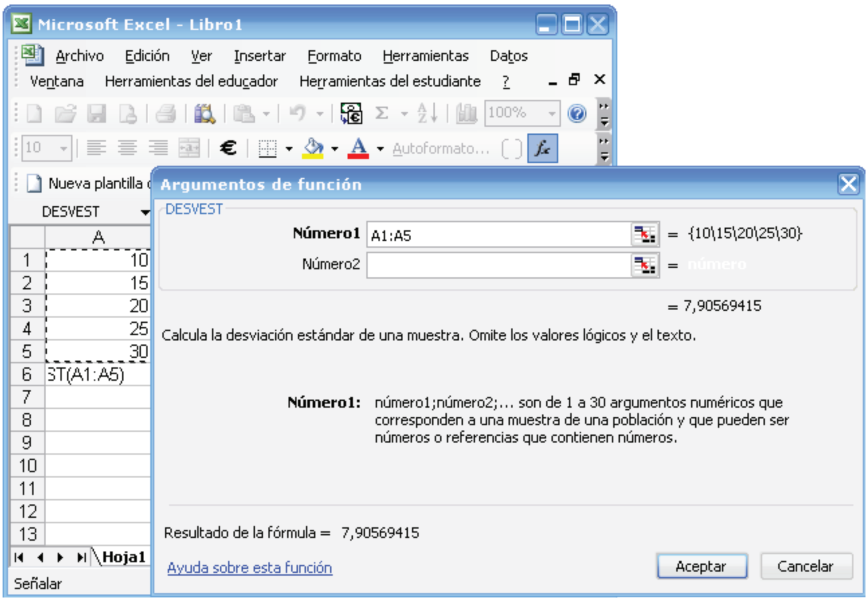


Figura 95.

Observamos que la desviación estándar es: **7,90.**

TABLAS DE FRECUENCIA

Su objetivo es el de presentar en forma ordenada los valores que toman las diferentes características, de tal manera que quien lee tenga una claridad del informe o pueda hacer correcciones sobre el mismo.

EJEMPLO 28.

Los datos dados a continuación corresponden al código de sellado de 40 artículos de un supermercado de la ciudad de Pereira.

50	54	60	61	55	64	53	62
58	57	63	65	57	66	61	64
64	63	65	65	58	68	65	66
76	65	78	67	62	68	73	67
77	72	79	70	64	70	75	74

Hallar una tabla de frecuencias con Excel.

Solución:

Vamos a realizar todos los pasos para la construcción de una tabla de frecuencias.

Paso 1

Debemos hallar el dato mayor y el dato menor, para ello utilizamos en Excel las funciones de la cartera estadística MIN y MAX (mínimo y máximo) cuya sintaxis es:

=MIN(A1:H5)
=MAX(A1:H5)

Para nuestro caso tenemos:

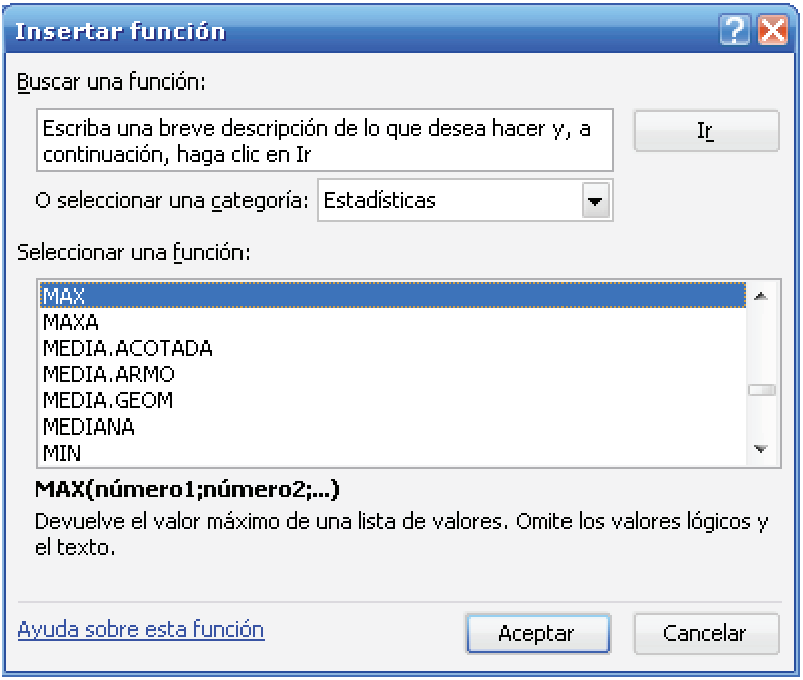


Figura 96.

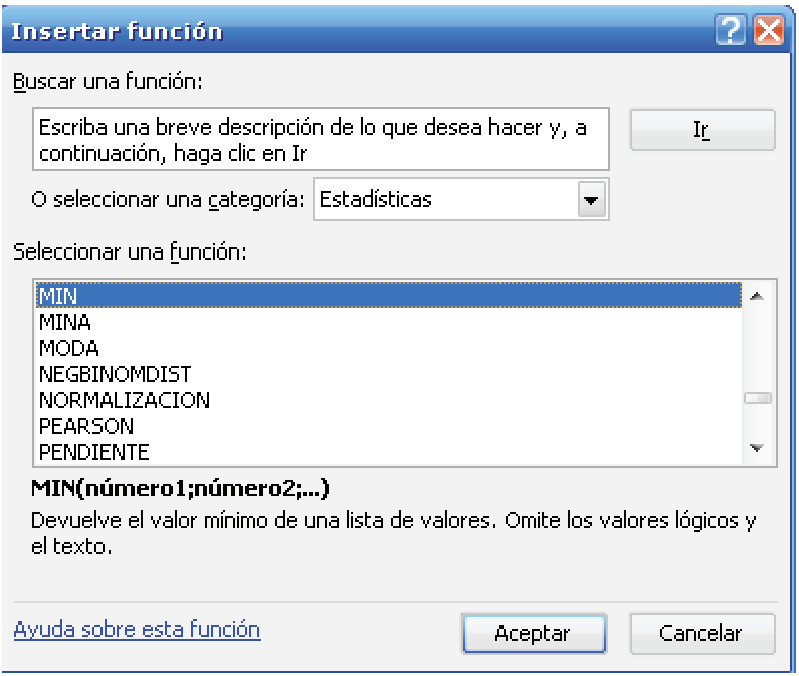


Figura 97.

Hagamos el ejercicio con el máximo, para el mínimo es igual.

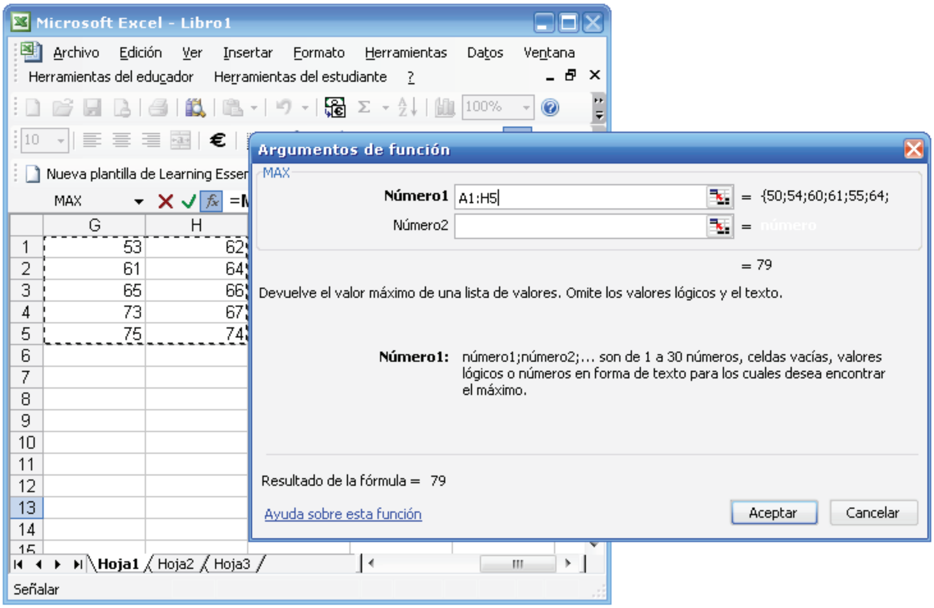


Figura 98.

Aceptamos y obtenemos el valor, para este caso es **79.**

Con estos valores hallamos el rango(R).

Rango = Dato mayor – Dato menor

R = 79 – 50 = 29

En Excel tenemos: =79 – 50 = 29

Número de Intervalos (m)

Utilizamos la regla de Sturges que está dada por:

$$m = 1 + 3{,}3\log(n)$$ donde *n* es el número de datos.

En Excel tenemos: = 1+3,3*log (40) para nuestro caso:

=1+3,3*log (4)= 4,88 = 5.0

Siempre aproximamos al entero más cercano.

Amplitud del intervalo de clase (C) C = R/m

En Excel: = 29/5 = 5,8 = 6.0

Con estos datos construimos la tabla de frecuencias.

CLASES	fi	h_i	F_i	H_i	X_i	L.R
50-54	3	0.075	3	0.075	52	49.5-54.5
55-59	5	0.125	8	0.2	57	54.5-59.5
60-64	11	0.275	19	0.475	62	59.5-64.5
65-69	11	0.275	30	0.75	67	64.5-69.5
70-74	5	0.125	35	0.875	72	69.5-74.5
75-79	5	0.125	40	1.0	77	74.5-79.5
TOTAL	40	1.000				

Veamos lo siguiente:

i) Cada clase contiene 5 datos que corresponde a la amplitud de clase, por ejemplo la clase 50 – 54 contiene los siguientes valores: 50, 51, 52, 53, 54

ii) La frecuencia absoluta (**f_i**) corresponde al número de datos incluidos en cada clase, ejemplo: la clase 75 – 79 contiene 5 datos, así: 75, 76, 77, 78, 79.

iii) La frecuencia relativa (**h_i**) es el valor que se obtiene al dividir cada frecuencia absoluta entre el total de datos.

EJEMPLO 29.

$$h_1 = \frac{3}{40} = 0.075, \quad h_2 = \frac{5}{40} = 0.125$$

iv) La frecuencia absoluta acumulada (**F_i**). Resulta de lo siguiente:

$$F_1 = f_1 \quad 3 = 3$$
$$F_2 = f_1 + f_2; F_2 = 3 + 5 = 8$$
$$F_3 = f_1 + f_2 + f_3; \; F_3 = 3 + 5 + 11 = 19$$

v) Frecuencia relativa acumulada (**H_i**). Se obtiene de la siguiente manera:

$$H_1 = h_1\,;\;\; H_1 = 0.075$$
$$H_2 = h_1 + h_2\,;\;\; H_2 = 0.075 + 0.125 = 0.2$$

Al terminar se debe comprobar que el último H_i debe ser igual 1.0, en caso contrario se aproximan los valores de h_i.

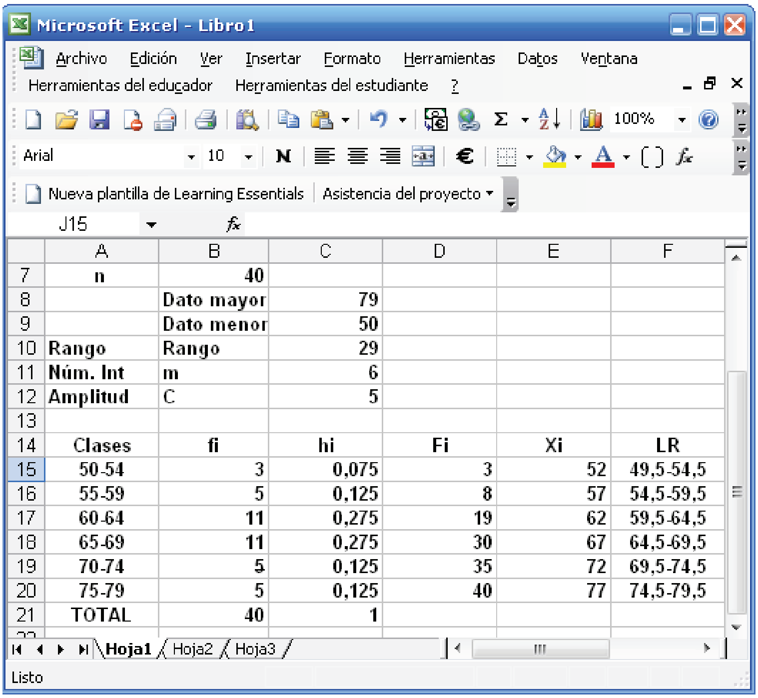
vi) Las marcas de clase **(X_i)** Se obtienen así:

$$X_1 = \frac{50+54}{2} = 52 \;\;;\;\; X_2 = \frac{55+59}{2} = 57$$

vii) Los límites reales se obtienen de la manera siguiente:
Se toma el límite inferior de una clase con el límite superior de la siguiente y se suman, luego se dividen entre dos, así:

$$LR_1 = \frac{50+59}{2} = 54.5$$
$$LR_2 = \frac{55+64}{2} = 59.5$$

Un resumen en Excel:



	A	B	C	D	E	F
7	n	40				
8		Dato mayor	79			
9		Dato menor	50			
10	Rango	Rango	29			
11	Núm. Int	m	6			
12	Amplitud	C	5			
13						
14	Clases	fi	hi	Fi	Xi	LR
15	50-54	3	0,075	3	52	49,5-54,5
16	55-59	5	0,125	8	57	54,5-59,5
17	60-64	11	0,275	19	62	59,5-64,5
18	65-69	11	0,275	30	67	64,5-69,5
19	70-74	5	0,125	35	72	69,5-74,5
20	75-79	5	0,125	40	77	74,5-79,5
21	TOTAL	40	1			

Figura 99.

Excel tiene una función que nos permite obtener la tabla de frecuencias en un instante. La función **HISTOGRAMA**. En la barra de herramientas damos clic a Herramientas luego análisis de datos e Histograma.

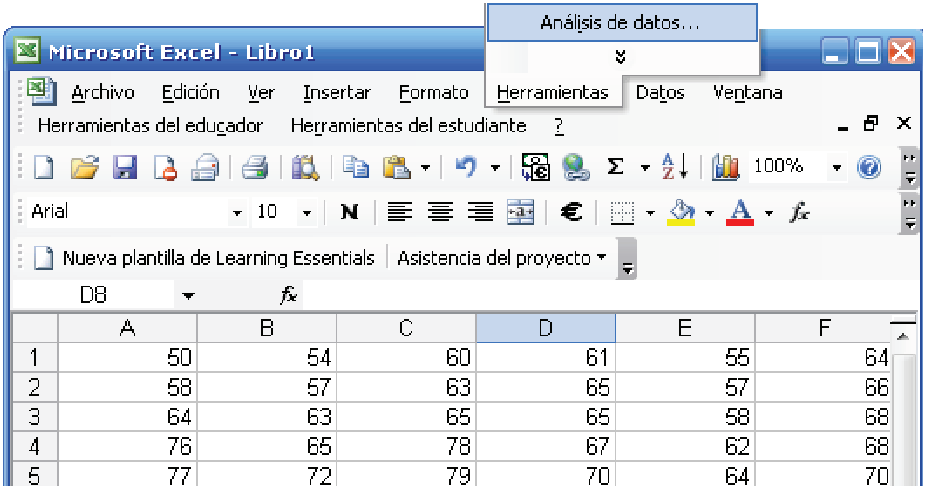


Figura 100.

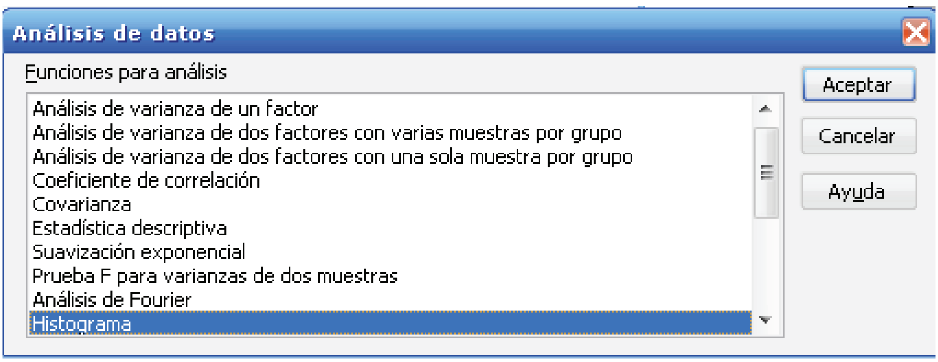


Figura 101.

Escribimos en la hoja donde están los datos, los límites superiores y con Histograma tenemos:

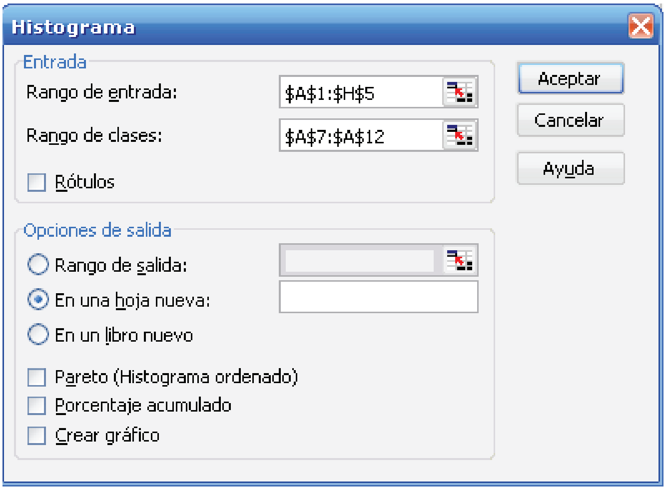


Figura 102.

En el campo rango de entrada escribimos las celdas donde están los 40 datos, en el campo rango de clases escribimos las celdas donde están los límites superiores. En una hoja nueva nos muestra la tabla de frecuencias, aclarando que solo aparece los límites superiores y la frecuencia relativa, lo demás toca completarlo por parte nuestra.

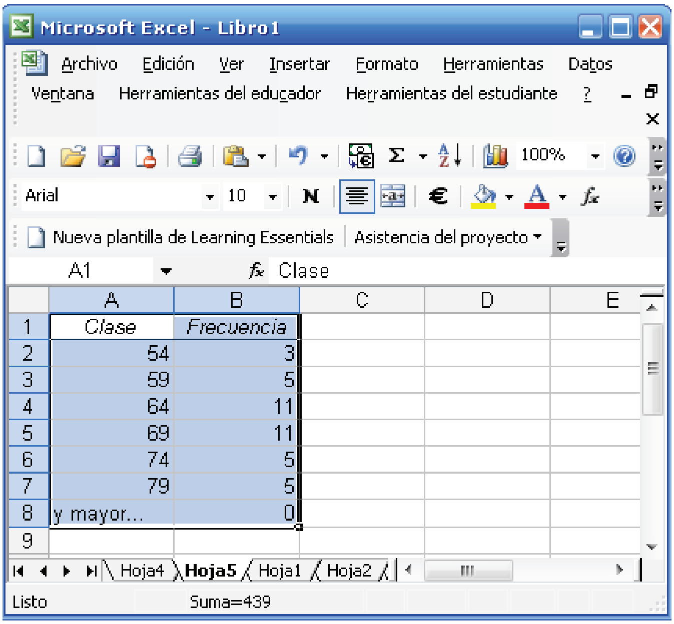


Figura 103.

Existe en Excel la opción **estadística descriptiva,** la cual nos permite obtener las medidas de tendencia central y variabilidad.

EJEMPLO 30.

Obtener las medidas de tendencia central y variabilidad de los siguientes datos:

No	Estatura	No	Estatura
1	1,45	11	1,56
2	1,56	12	1,56
3	1,67	13	1,79
4	1,71	14	1,86
5	1,69	15	1,75
6	1,81	16	1,70
7	1,73	17	1,56
8	1,74	18	1,78
9	1,76	19	1,56
10	1,67	20	1,71

Solución:

En la barra de herramientas damos clic en análisis de datos y encontramos la ventana:

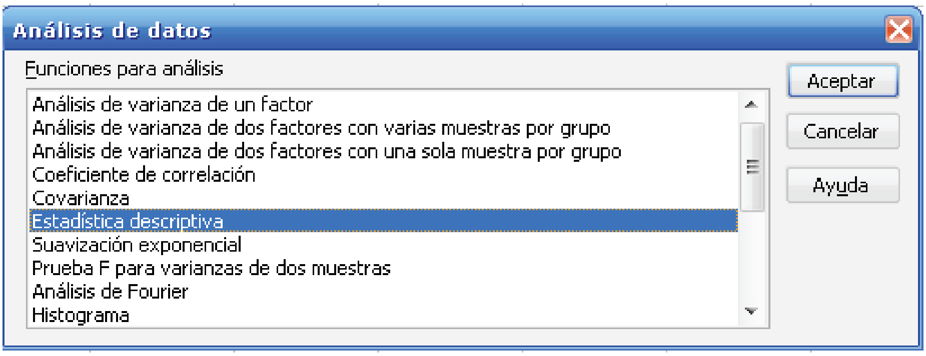


Figura 104.

Escogemos la opción **Estadística descriptiva** aceptamos y aparece la ventana:

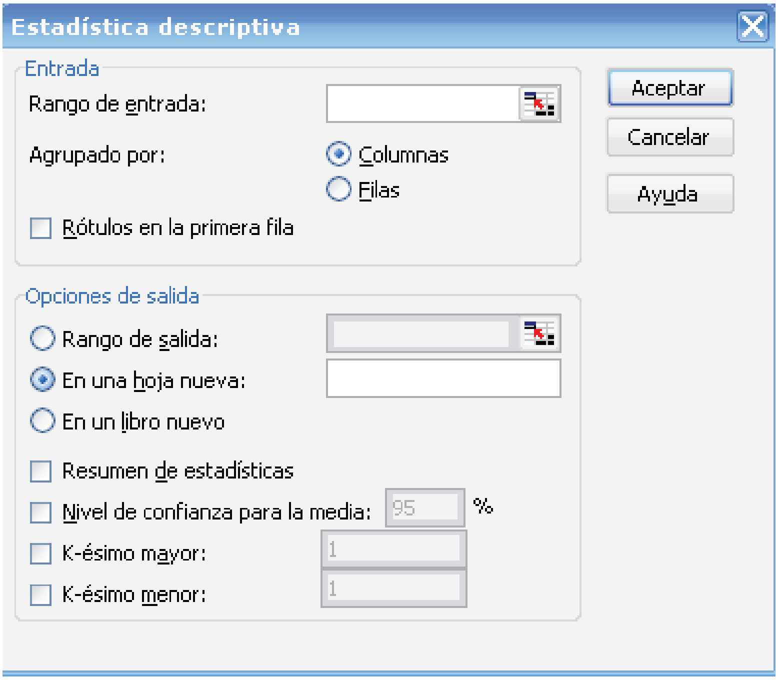


Figura 105.

El rango de entrada corresponde a los datos y rango de salida la hoja donde queremos que salga el resultado y finalmente habilitamos el campo resumen de estadísticas. Luego de digitar los datos aceptamos y obtenemos los resultados pedidos.

Media	1,681
Error típico	0,02385151
Mediana	1,705
Moda	1,56
Desviación estándar	0,10666721
Varianza de la muestra	0,01137789
Curtosis	-0,44720134
Coeficiente de asimetría	-0,4740701
Rango	0,41
Mínimo	1,45
Máximo	1,86
Suma	33,62
Cuenta	20

La **curtosis** indica qué tan puntiaguda es la distribución de probabilidades de los datos utilizados.

El coeficiente de **asimetría** analiza si la curva que forman los datos, presenta la misma forma a izquierda y derecha de la media aritmética, si esto se cumple se dice que la curva es simétrica, en caso contrario se dice que es asimétrica.

Se utiliza la siguiente fórmula: $$CA = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(x_i - \bar{x})}{S_x} \right)^3$$

CA = Coeficiente de asimetría
n = Cantidad de datos utilizados
x_i = dato i-ésimo de la muestra
$\bar{x}$ = media aritmética
S_x = desvío de la variable x.

Si CA > 0, la curva presenta asimetría positiva. Si CA = 0, entonces la curva es simétrica si CA < 0 es asimétrica. En Excel existen las funciones:
= CURTOSIS (….) y =COEFICIENTE DE ASIMETRÍA.

2.5 GRÁFICOS ESTADÍSTICOS

Gráfico de barras

El siguiente cuadro nos muestra el tipo de artículo en este caso galletas que producen una empresa de la ciudad y su venta en un supermercado. Elaborar un grafico de barras.

EJEMPLO 31.

ARTÍCULO	VENTAS
A. Galletas wafer	60
B. Galletas rondalla	35
C. Galleta macarena	25
D. Galletas saltinas	45
E. Galletas recreo	50
TOTAL	**215**

Elaboremos el gráfico de barras, para esto vamos al asistente de gráficos, seleccionamos el tipo de gráfico y luego la información de la tabla anterior que debe estar en la hoja de Excel. Veamos los pasos:

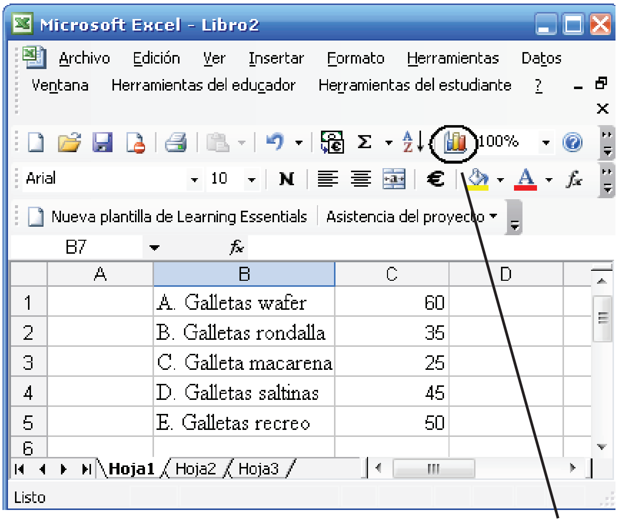


Figura 106. Asistente para gráficos

Damos clic allí y nos aparece la ventana de la figura 95.

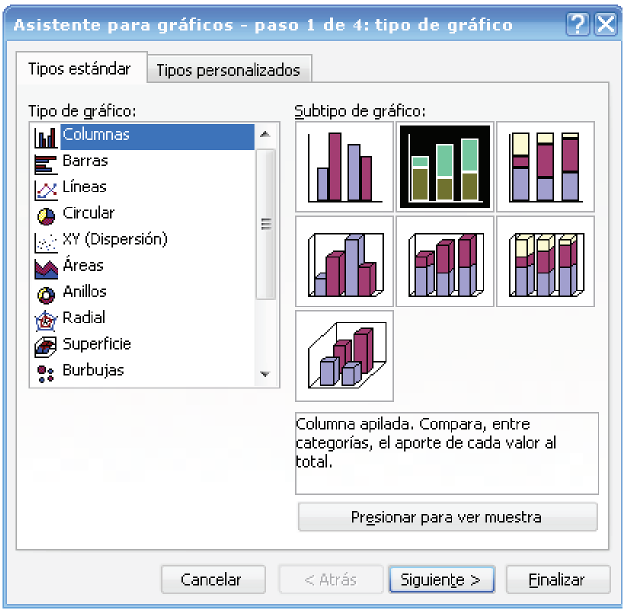


Figura 107.

Seleccionamos el gráfico adecuado y obtenemos:

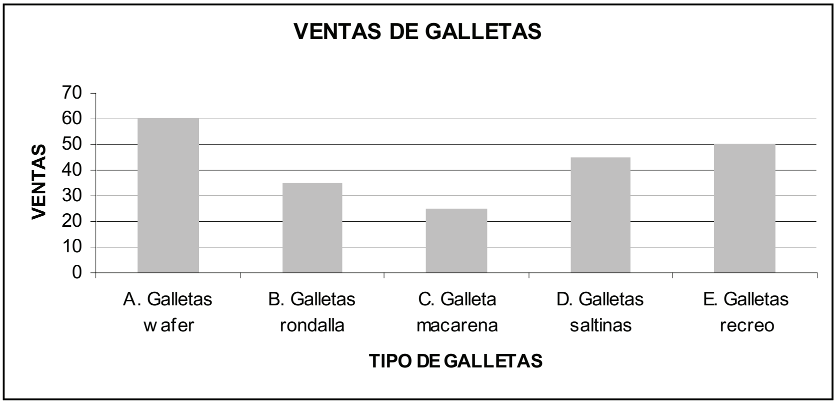


Figura 108.

Diagrama circular (diagrama de pastel)

Este gráfico consiste en un círculo dividido en partes proporcionales y sabemos que hay 360 grados. Este gráfico es especial para representar una distribución de frecuencias relativas. Realicemos el gráfico para la tabla del ejemplo 31.

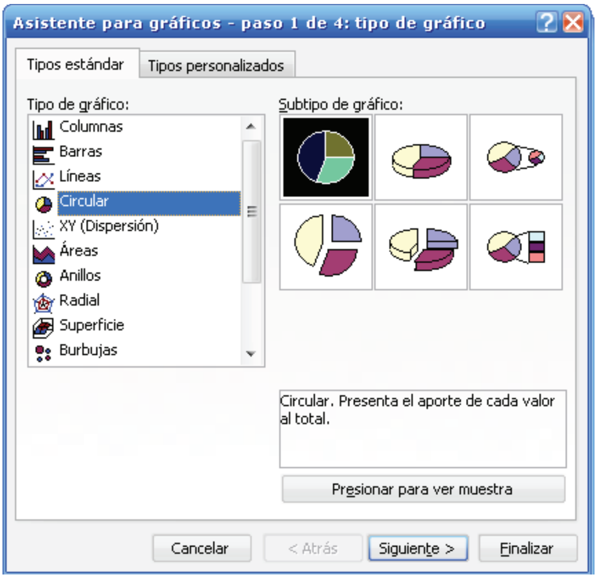


Figura 109.

Escogemos el diagrama deseado y obtenemos:

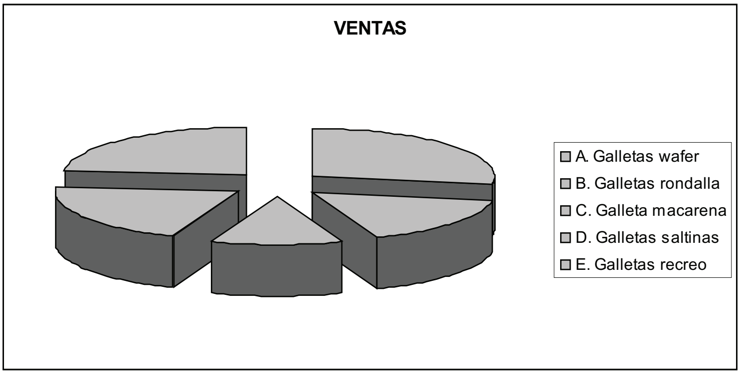


Figura 110.

<u>Histograma</u>

Cuando trabajamos con datos agrupados se utiliza el histograma de frecuencias absolutas en vez del diagrama de barras. El histograma consiste en una serie de rectángulos que tienen: sus bases sobre el eje horizontal con centros en las marcas de clase y longitud igual al tamaño de los intervalos de clase. Superficies proporcionales a las frecuencias de clase.

EJEMPLO 32.

Dibujar un histograma para la tabla de frecuencias del ejemplo 28. Realizamos los pasos para construir un gráfico como los anteriores, en este caso escogemos el de barras:

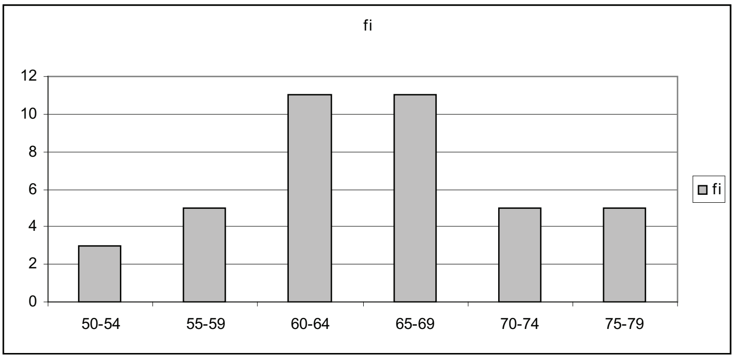


Figura 111.

Como necesitamos un histograma y este tiene sus barras juntas damos clic en cualquiera de las barras y aparece una ventana de la cual oprimimos en formato de serie de datos, luego clic en opciones y tenemos la ventana:

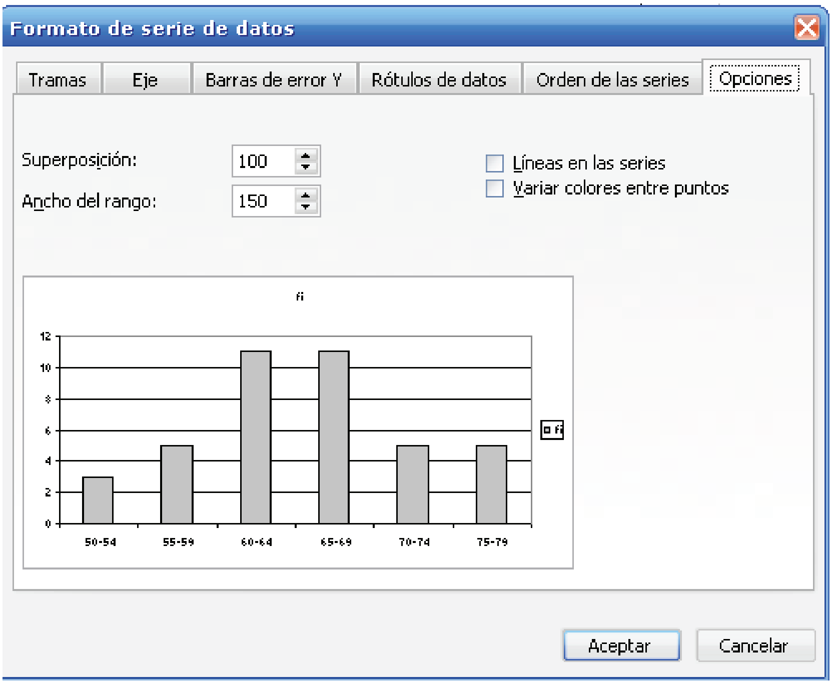


Figura 112.

En ancho de rango bajamos hasta 0 y así obtenemos el gráfico esperado.

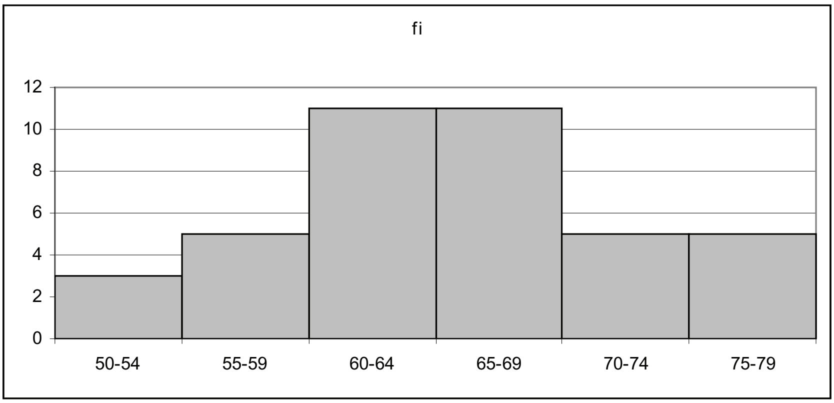


Figura 113.

Polígono de frecuencias

Un polígono de frecuencias es una línea que conecta los puntos medios de todas las barras del histograma. Esto nos indica que podemos reproducir el histograma mediante el trazado de las líneas verticales desde los límites de clase señalados en el eje horizontal y luego con rectas horizontales a la altura de los puntos medios del polígono.

El polígono de frecuencias para nuestro ejemplo es:

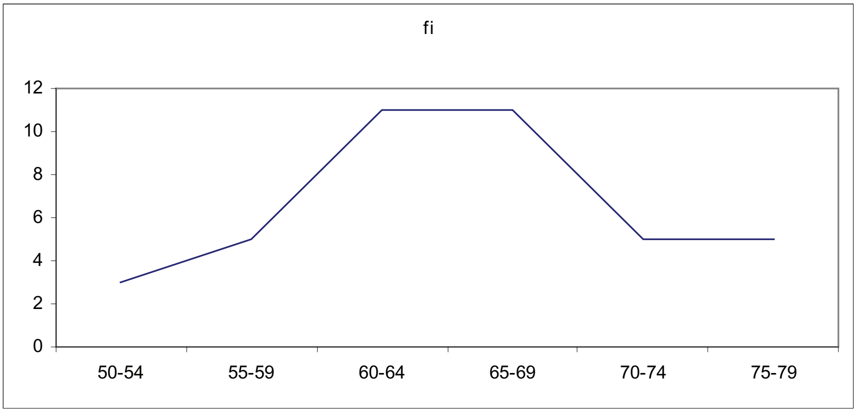


Figura 114.

Existen más modelos de gráficos pero depende del gusto y la necesidad de quien esté realizando el trabajo.

2.6 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL PARA DATOS AGRUPADOS

Utilizaremos la información del ejemplo 28.

Media

El procedimiento es igual que para los datos no agrupados, sólo que aquí escribimos las celdas donde aparecen los datos o simplemente "arrastramos los datos" como muestra la figura 111.

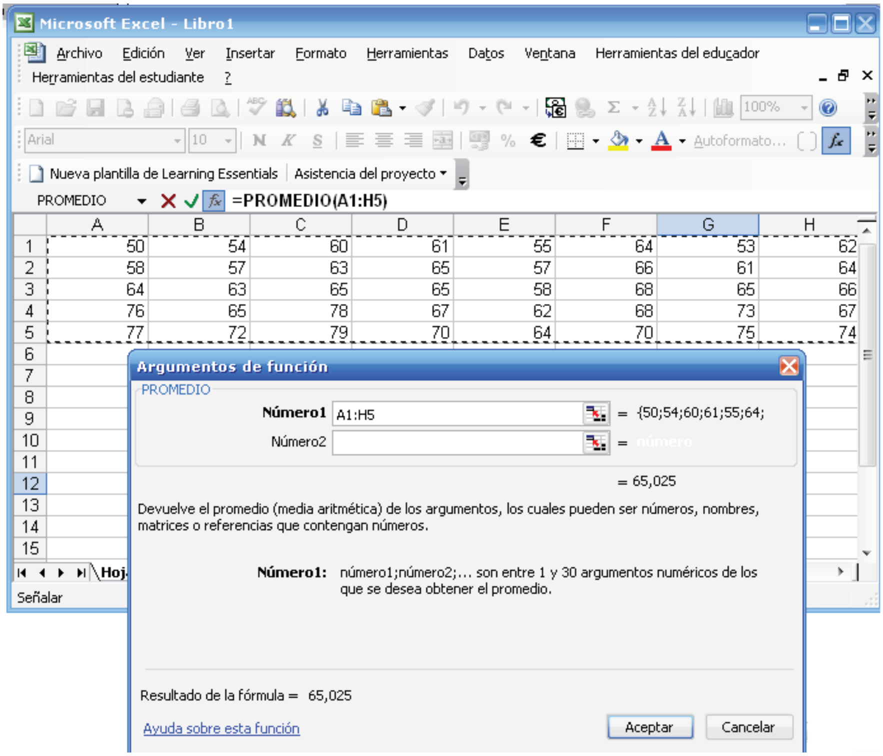


Figura 115.

Aceptamos y obtenemos el resultado ***65,025.***

De igual manera obtenemos las demás medidas.

Desviación estándar para datos agrupados

Utilizamos la función **DESVEST**. La sintaxis es:

=DESVEST (A1:H5).

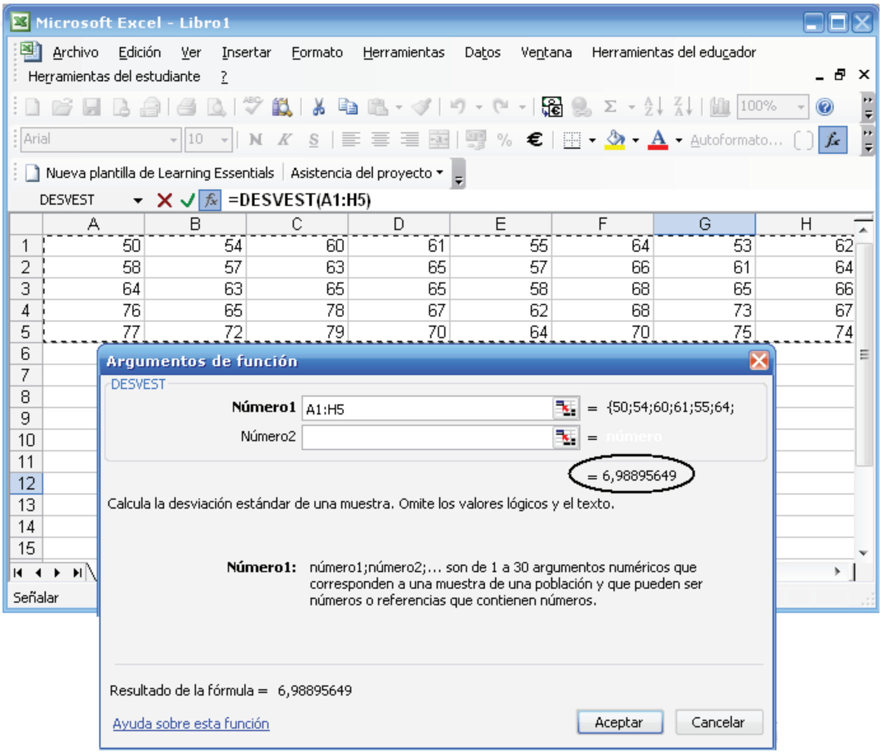


Figura 116.

El valor es aproximadamente ***7.0.***

2.7 ALGUNAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

LANZAMIENTO DE UN DADO

Elaboremos una hoja que nos permita hacer la simulación del lanzamiento inicialmente de un dado y luego de dos dados. Para ello nos vamos a apoyar en la función de Excel **ALEATORIO**, cuya sintaxis es:

= ALEATORIO ( )

Esta función nos genera al azar un número entre 0 y 1. De acuerdo con la teoría ésta no es totalmente aleatoria, pero nos permite por lo menos hacer una simulación.

Construcción de la tabla

Abrir una hoja de Excel y construir el siguiente algoritmo:

	A	B	C	D
1				
2	LANZAMIENTOS	TOTAL		
3	=ENTERO(ALEATORIO ()*6)+1	MEDIA		
4		FRECUENCIA	Absoluta	Relativa
5				
6		1	=CONTAR.SI(A3:A52;"=1")	=C6/50
7		2		
8		3		
9		4		
10		5		
11		6		

Figura 117.

En la celda A3 hemos escrito la función =ENTERO (ALEATORIO ()*6)+1 la cual nos genera un número aleatorio entre 1 y 6, por ello se añade el uno.

Seleccionamos la columna de celdas desde A3 hasta A52. Con CTRL + J llenamos la columna seleccionada. Si pulsamos F9 aparecerá un nuevo cálculo cada vez.

Para obtener los valores de las frecuencias absolutas introducimos la función:

=CONTAR.SI (A3:A52;"=1")

Esta función cuenta el número de celdas que cumplen la condición "=1" en el bloque de celdas que señalamos (A3 a A52) que corresponde a 50 lanzamientos. De esta manera encontramos la frecuencia de salida del número uno. De igual manera se hace para las celdas B6 en adelante.

Para hallar las frecuencias relativas dividimos las frecuencias absolutas entre el número de lanzamientos.

La tabla queda de la siguiente manera:

	A	B	C	D
1				
2	LANZAMIENTOS	TOTAL		
3	=ENTERO(ALEATORIO()*6)+1	MEDIA		
4	=ENTERO(ALEATORIO()*6)+1	FRECUENCIA	Absoluta	Relativa
5	=ENTERO(ALEATORIO()*6)+1			
6	=ENTERO(ALEATORIO()*6)+1	1	=CONTAR.SI(A3:A52;"=1")	=C6/50
7	=ENTERO(ALEATORIO()*6)+1	2	=CONTAR.SI(A3:A52;"=2")	=C7/50
8	=ENTERO(ALEATORIO()*6)+1	3	=CONTAR.SI(A3:A52;"=3")	=C8/50
9	=ENTERO(ALEATORIO()*6)+1	4	=CONTAR.SI(A3:A52;"=4")	=C9/50
10	=ENTERO(ALEATORIO()*6)+1	5	=CONTAR.SI(A3:A52;"=5")	=C10/50
11	=ENTERO(ALEATORIO()*6)+1	6	=CONTAR.SI(A3:A52;"=6")	=C11/50

Figura 118.

Una simulación es la siguiente:

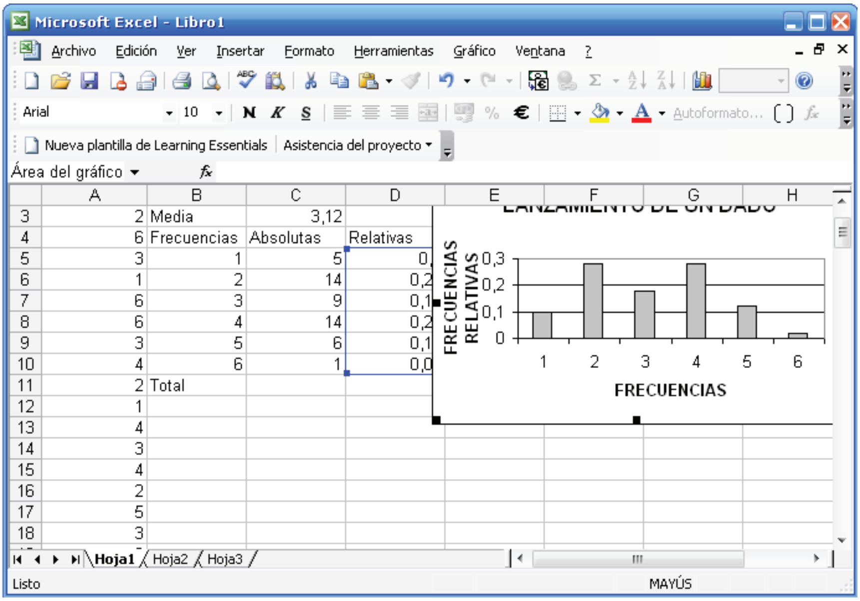


Figura 119.

Para dos dados basta con colocar una columna (B) el segundo dado y el proceso de construcción de la hoja es igual.

Vamos ahora a construir una hoja para generalizar el lanzamiento de un dado y la idea es no limitar a cierto número de lanzamientos.

	A	B	C	D
1	Lanzamiento sucesivo de un dado			
2	Acumulado	=ENTERO(ALEATORIO()*6)+1	1	
3	Número		2	
4	Media		3	
5	Iniciar en 0		4	
6			5	
7			6	

Figura 120.

Cuando pulsemos F9 en B2 aparecerá un nuevo número entre 1 y 6. Como la idea es acumular los valores, entonces en B3 debemos escribir =B3 + B2, pero podemos tener problemas con un error, para evitarlo indicamos a Excel la opción *iteración*. En *Herramientas* hacemos clic y aparece *opciones,* seleccionamos *calcular* en la parte superior de la ventana y marcamos *iteración.* Incluimos 1 como número máximo de iteraciones y así se procesarán de uno en uno.

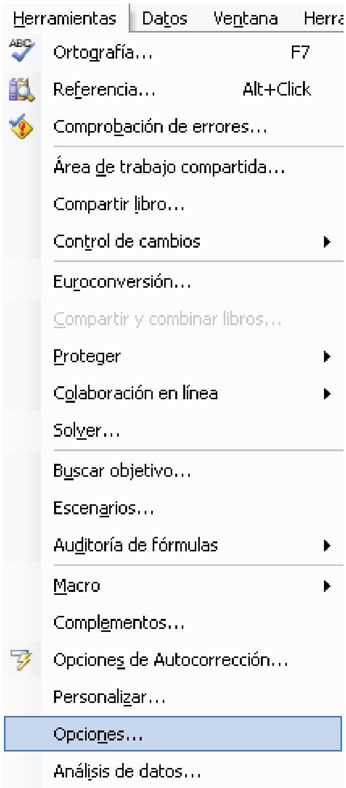


Figura 121.

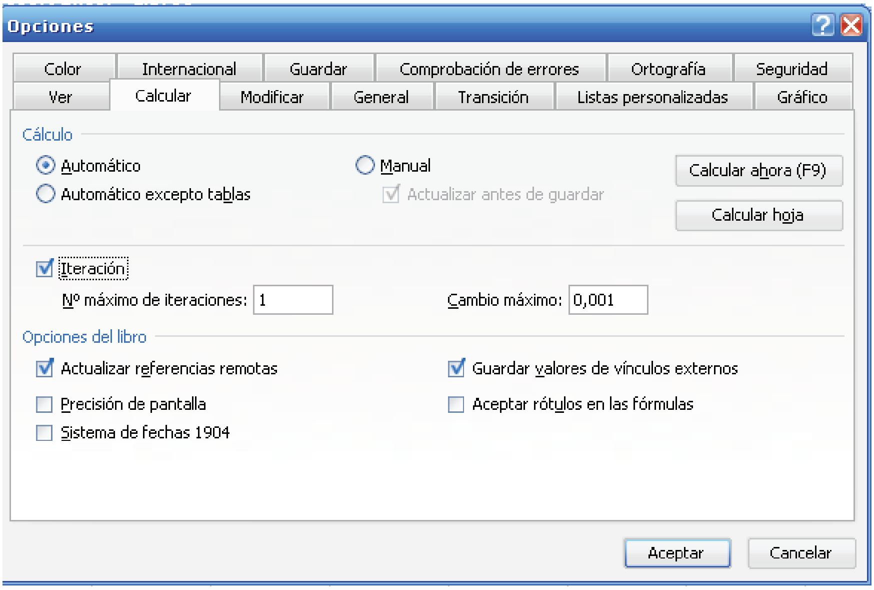


Figura 122.

Con esta ayuda podemos incluir = B3 + B2 en la celda B3 y en B4 escribimos =B4 + 1. Para realizar un conteo cada vez que pulsemos F9 en D2 podemos incluir la función. =SI(B6=0;0;1+ENTERO(6*ALEATORIO())). Cada vez que salga "1" se incrementará el valor anterior de D2 y si no es así, tomará el valor anterior.

La tabla final es la siguiente:

	A	B	C	D	E
1	Lanzamiento sucesivo de un dado				
2	TIRADA	=SI(B6=0;0;1+ENTERO (6*ALEATORIO()))	1	=SI($B$6=0;0;SI($B$2=C2;D2+1;D2))	=D2/$B$4
3	ACUMULAD	=SI(B6=0;0;B3+B2)	2	=SI($B$6=0;0;SI($B$2=C3;D3+1;D3))	=D3/$B$4
4	Nº	=SI(B6=0;0;B4+1)	3	=SI($B$6=0;0;SI($B$2=C4;D4+1;D4))	=D4/$B$4
5	MEDIA	=B3/B4	4	=SI($B$6=0;0;SI($B$2=C5;D5+1;D5))	=D5/$B$4
6	PONER A 0		5	=SI($B$6=0;0;SI($B$2=C6;D6+1;D6))	=D6/$B$4
7			6	=SI($B$6=0;0;SI($B$2=C7;D7+1;D7))	=D7/$B$4

Figura 123.

Con el signo pesos buscamos poder llenar hacia abajo en D y E, cada vez que pulsamos F2.

Para probar lo hecho se introduce 0 en B6 y pulsamos un buen tiempo F9. Si introducimos 1 ahora en B6 y pulsamos un buen tiempo F9 a medida que se aumenta el número de pruebas, comprobamos la ley de los grandes números y tiende a presentarse una estabilización de las frecuencias en torno a la probabilidad.

Finalmente podemos hacer comentarios, utilizando la opción insertar comentario en la barra de herramientas. En B6 introducimos iniciar en cero.

Una simulación es la siguiente:

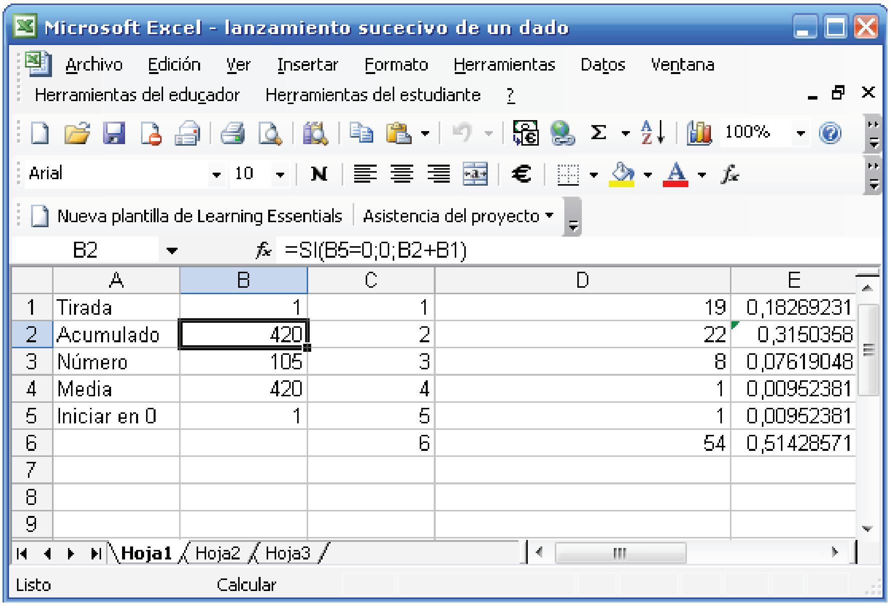


Figura 124.

2.8 APLICACIÓN DEL TEOREMA DE BAYES

Vamos a ver una aplicación sencilla del teorema de Bayes en Excel.

EJEMPLO 33.

Un perro persigue a un gato. El perro puede entrar en una de tres puertas P1, P2 o P3. En cada una de ellas puede el gato ser cazado. Se conoce:

P (entre por la puerta P1) = P (P1) = 0,5; P (P2) = 0,4 y P (P3) = 0,1
P (lo hace habiendo entrado en B) = P (B1/P1) = 0,3, P (B1/P2) = 0,5
P (B1/P3) = 0,2

¿Cuál es la probabilidad de que el perro cace al gato?
Supongamos que el perro ha cazado al gato ¿Cuál es la probabilidad de que hubiese sido por la puerta P1?

Construimos una hoja en Excel que nos permita este tipo de cálculos.

	A	B	C	D	E
1	TEOREMA DE BAYES APLICACIÓN				
2			B1	B2	B3
3	P1	0,5	0,3	0,6	0
4	P2	0,4	0,5	0,4	0
5	P3	0,1	0,2	0,9	0
6		=SUMA(B3:B5)			
7		P(PyB)	B1	B2	B3
8		P1	=$B3*C3	=$B3*D3	=$B3*E3
9		P2	=$B4*C4	=$B4*D4	=$B4*E4
10		P3	=$B5*C5	=$B5*D5	=$B5*E5
11			B1	B2	B3
12		Ptotal(B)	=C8+C9+C10	=D8+D9+D10	=E8+E9+E10

Figura 125.

Tenemos en las celdas B3, B4 y B5 las probabilidades de los sucesos P1, P2 y P3 que pertenecen a la primera prueba. Para comprobar podemos en B6 escribir **= SUMA (B3:B5)** y así comprobamos que la suma es uno.

En C3, C4 y C5 introducimos las probabilidades del primer suceso de la segunda prueba. En las celdas D3 a E5 introducimos las demás probabilidades. En E3 se puede escribir la expresión **= C3 + D3 + E3** y así comprobamos que la suma es uno.

De igual manera podemos escribir **= C4 + D4 + E4** y **= C5 + D5 + E5** en las celdas E4 y E5 respectivamente.

En las celdas C8 y E8 incluimos las probabilidades posibles de la intersección de cada suceso de la primera prueba y cada suceso de la segunda.

Estas probabilidades se hallan multiplicando las correspondientes probabilidades de los sucesos. Al incluir el signo $ podemos llenar la celda C8 y copiar las demás celdas.

Las probabilidades totales de la segunda prueba (ser cazado) se pueden calcular en las celdas C12, D12 y E12 realizando la suma de las correspondientes probabilidades de los sucesos condicionados situados en las celdas superiores.

Veamos la siguiente tabla:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3						=SUMA(C3:E3)			
4						=SUMA(C4:E4)			
5						=SUMA(C5:E5)			
6									
7							B1	B2	B3
8						P1	=C8/C$12	=D8/D$12	=E8/E$12
9						P2	=C9/C$12	=D9/D$12	=E9/E$12
10						P3	=C10/C$12	=D10/D$12	=E10/E$12
11							=SUMA(G8:G10)	=SUMA(H8:H10)	=SUMA(I8:I10)
12						=SUMA(C12:E12)			

Figura 126.

En G8 dividimos la probabilidad del suceso intersección P (P1 y B1) entre la probabilidad total del suceso B1. De esta manera obtenemos P (P1 y B1) entre la probabilidad total del suceso B1. De igual manera obtenemos P (B1/P1). El signo $ nos permite copiar el resto de celdas.

También podemos incluir varias celdas para comprobar que las correspondientes probabilidades introducidas suman uno y así evitar errores.

2.9 ALGUNOS COMANDOS DE INTERÉS EN PROBABILIDAD

= COMBINAT (m, n) nos permite hallar las posibles combinaciones que se pueden obtener de un conjunto de **m** objetos tomados en grupos de **n** sin importar el orden.

EJEMPLO 34.

Calcular: $\binom{12}{6}$ *Solución:*

En Excel utilizamos la fórmula y obtenemos:

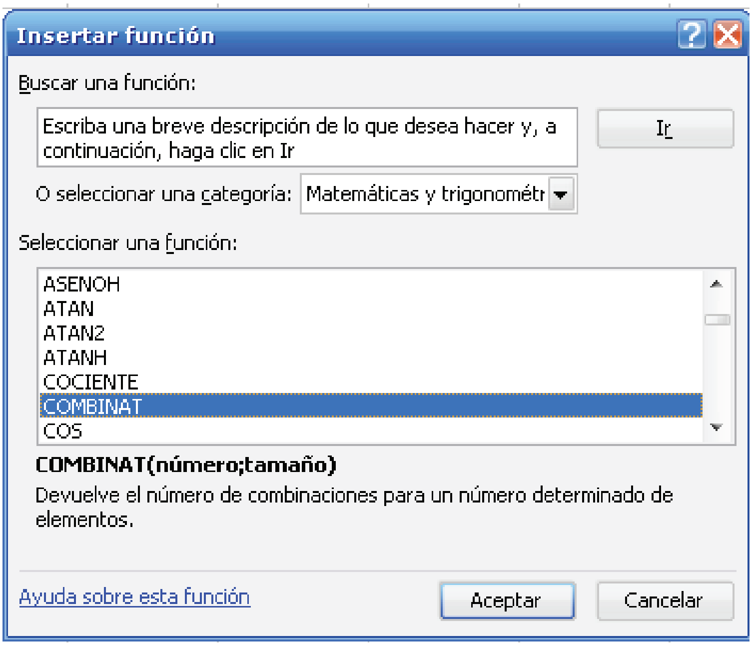


Figura 127.

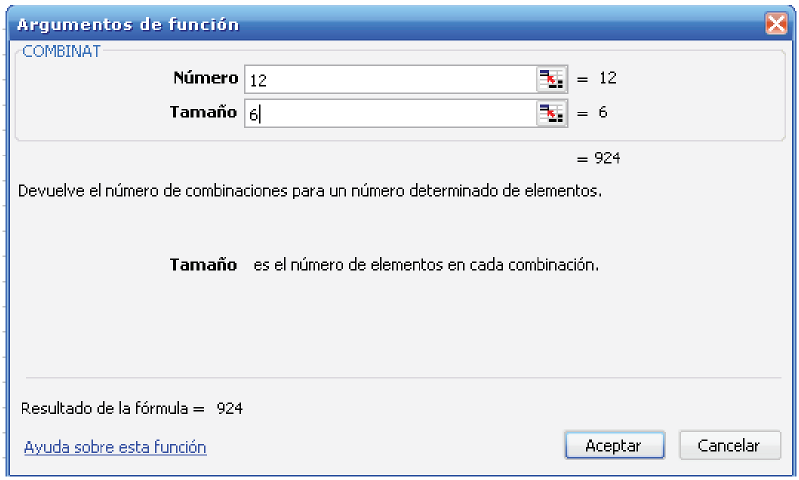


Figura 128.

= FACT (n). Muestra el resultado del producto de de los primeros enteros. La fórmula para ello es ***n!***

EJEMPLO 35.

Calcular FACT(6)

La solución es ***720.*** el procedimiento es igual que el anterior.

= SUMA.CUADRADOS(a, b, c,…)

Esta función calcula la suma de los cuadrados de los números ***a, b, c, …***

EJEMPLO 36.

Calcular la suma de los cuadrados de: 2, 4, 5, 6.

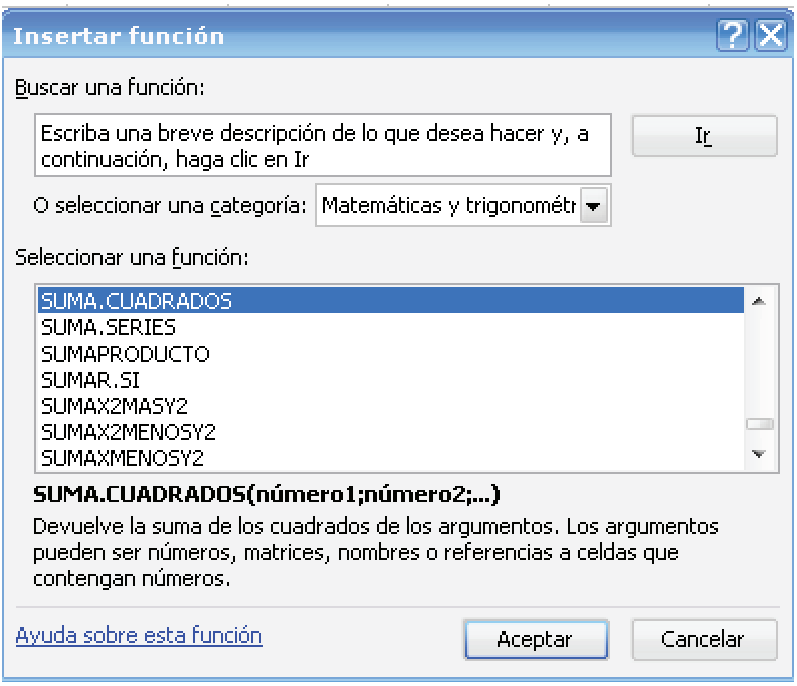


Figura 129.

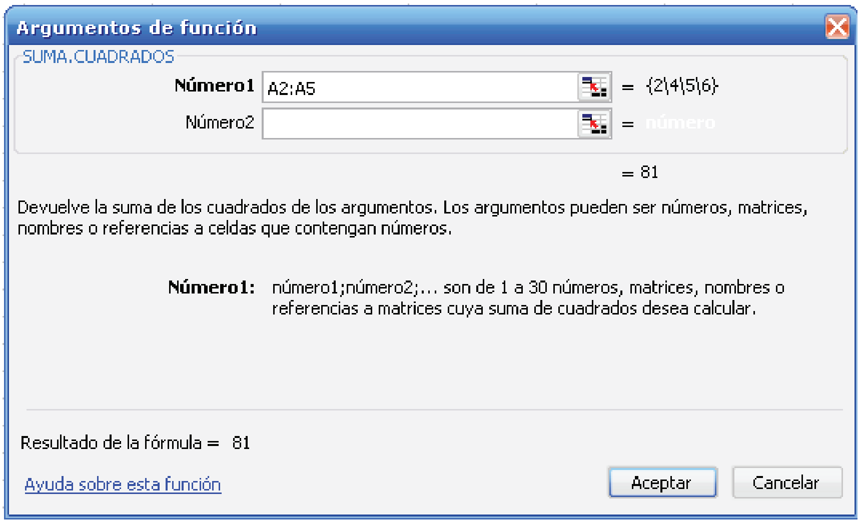


Figura 130.

2.10 CORRELACIÓN Y REGRESIÓN LINEAL

Para investigar la correlación entre dos variables, se ha creado en estadística el coeficiente de correlación ***r*** el cual mide la relación entre dos variables.

El valor de $\boldsymbol{r = 0}$ indica que no hay relación entre las variables.

Este coeficiente se encuentra entre -1.0 y 1.0. $(-1.0 \leq r \leq 1.0)$.

La fórmula de cálculo es: $$r = \frac{\sum x\,y}{\sqrt{\left(\sum x^2\right)\left(\sum y^2\right)}}$$

Para estas confrontaciones se utiliza el diagrama de dispersión que son los planos cartesianos en los que se marcan los puntos correspondientes a los pares (x, y) de los valores de las variables.

El *análisis de regresión* es un conjunto de métodos estadísticos para la formulación matemática de modelos de relaciones entre variables, las cuales pueden ser usadas para predecir o hacer inferencias estadísticas.

El análisis de regresión tiene los siguientes usos: el primero es obtener los estimadores de los parámetros, estimar la varianza del error, obtener los errores estándares de los parámetros estimados, probar las hipótesis sobre los parámetros, cálculo de valores estimados basados en la ecuación estimada, estimar el ajuste o la falta de ajuste del modelo.

El modelo a utilizar es $y = a + bx$, a es el intercepto, b es la pendiente de la función la que nos indica el cambio marginal de Y respecto a X.

En Excel el trabajo es muy sencillo, veamos mediante un ejemplo.

EJEMPLO 37.

Para los datos de la tabla hallar:

a) Diagrama de dispersión
b) Recta de regresión y
c) Ecuación

Distancia en kilómetros(x)	Tiempo de entrega(y) (días)
825	3.5
215	1.0
1070	4.0
550	2.0
480	1.0
920	3.0
1350	4.5
325	1.5
670	3.0
1215	5.0

Solución:

a) El diagrama de dispersión se obtiene mediante el asistente de gráficos.

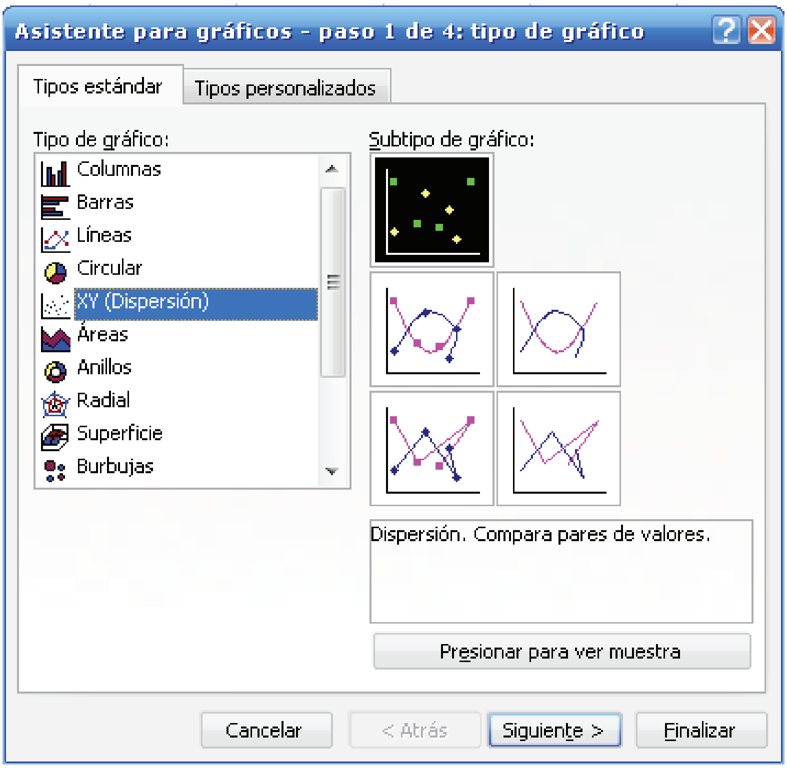


Figura 131.

Realizamos el mismo procedimiento utilizado para crear cualquier gráfico como en la sección de gráficos estadísticos.

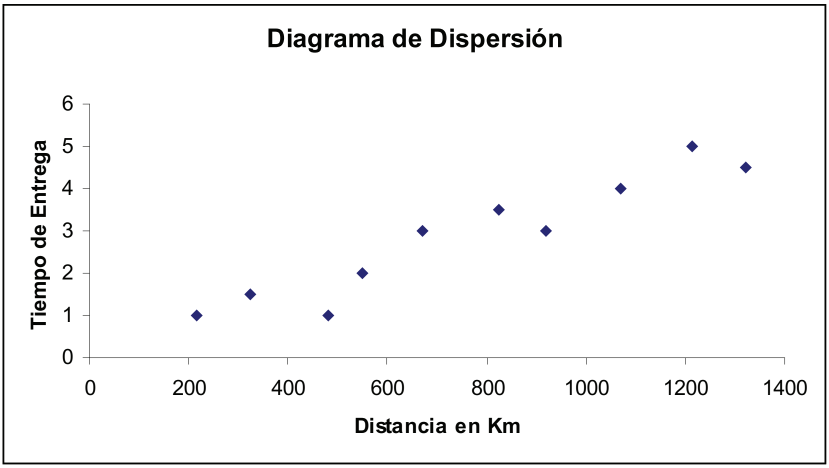


Figura 132.

Para hallar la línea y la ecuación, vamos a Excel y en el diagrama de dispersión con el botón derecho hacemos Clic sobre uno de los puntos y nos aparece la ventana:

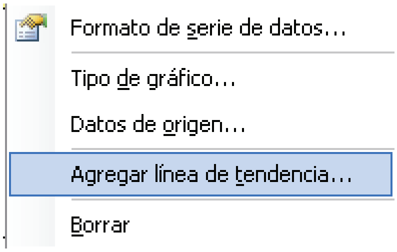


Figura 133.

Damos clic en agregar línea de tendencia y así obtenemos una ventana como la de la figura 137 en la cual hay un menú de opciones, el cual nos permite escoger la línea de tendencia y luego si hacemos clic en opciones ella nos permite colocar la ecuación en el gráfico.

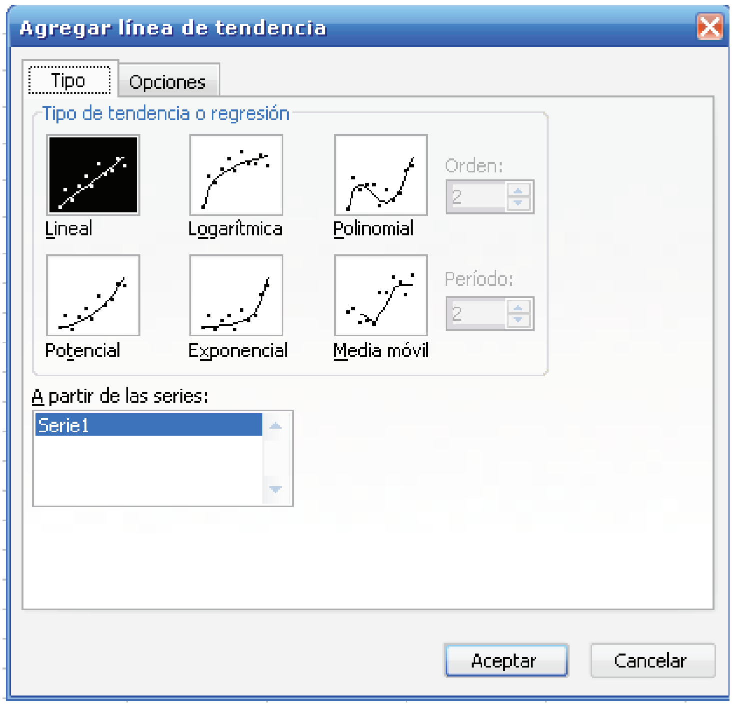


Figura 134.

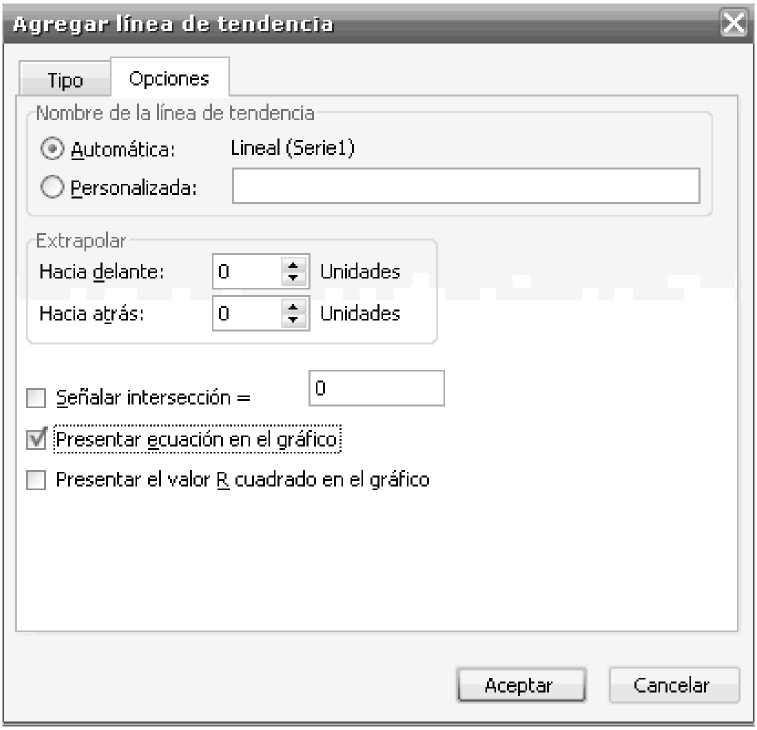


Figura 135.

Finalmente obtenemos lo pedido:

x	y
825	3,5
215	1
1070	4
550	2
480	1
920	3
1350	4,5
325	1,5
670	3
1215	5

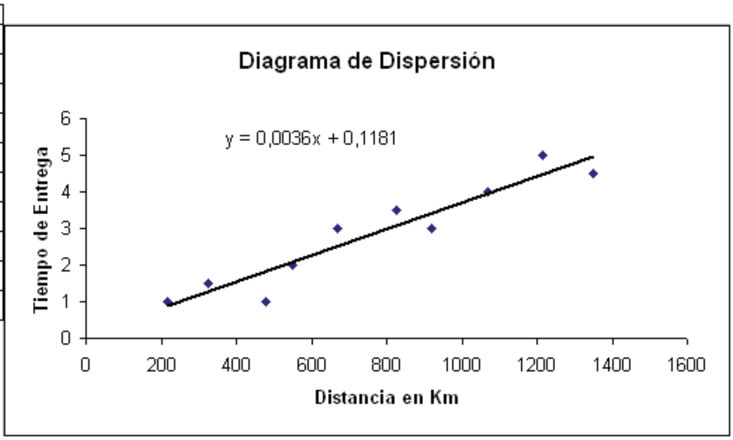


Figura 136.

2.11 ALGO DE GEOMETRÍA Y FÍSICA

Distancia entre dos puntos

Para calcular directamente la distancia entre dos puntos, de un punto a una recta y de un punto a un plano en el espacio métrico tridimensional se realiza el siguiente procedimiento en la hoja de cálculo:

- Abrimos una hoja de cálculo en Excel, en la columna A escribimos todas las etiquetas.

- En las celdas B1 introducimos *x,* en C1 *y* y D1 *z*. En las celdas B2,C2 y D2 introducimos las coordenadas de P y las de Q en B3, C3 y D3.

- Para determinar una recta lo hacemos con punto y un vector de dirección. El punto lo conseguimos de la fila 3 (de Q). Las coordenadas del vector se introducen en las celdas B5, C5 y D5.

- Mediante la ecuación general de un plano utilizando sus coeficientes en las celdas B7, C7,D7 y E7.

- Para calcular las diferentes distancias lo hacemos mediante los módulos del vector PQ cuyas coordenadas están en B12. Del vector VA de dirección de la recta del vector VB celda B15 que coincide con el área del paralelogramo, el cual se forma por el punto Q de la recta y un punto exterior P.

- En las filas 9 y 10 los vectores PQ VA x V B . Asi obtener las coordenadas del vector PQ, para ello se introducen en las celdas B9, C9 y D9 las ecuaciones: =B3-B2, =C3-C2 y =D3-D2. Esto es punto final menos punto inicial.

Las coordenadas del producto vectorial VA x PQ. Para ello introducimos las coordenadas de P y Q en las filas 2 y 3 y así se obtienen las distancias D12.

La hoja queda de la siguiente manera:

	A	B	C	D	E
1	Puntos	x	y	z	
2	Punto P	2	3	4	
3	Punto Q	5	-3	7	
4	RECTA	x	y	z	
5	Dirección	4	15	5	
6	PLANO	A	B	C	D
7	$AX + BY + +CZ = 0$	2	3	2	
8	**CÁLCULOS**				
9	Vector PQ	=B3-B2	=C3 – C2	=D3-D2	
10	V x PQ	=B9*D5+D9*C5	=B9*D5-D9*B5	=B9*C5+C9*B5	
11	MÓDULOS		DISTANCIAS		
12	PQ	=Raíz(B9^2+C9^2+D9^2)	P A Q	=Raíz(B9^2+C9^2+D9^2)	
13	VA	=Raíz(B5^2+C5^2+D5^2)	P a la recta A	=B15/B13	
14	VB	=Raíz(B7^2+C7^2+D7^2)	P al Plano B	=(B7*B2+C7*C2*D7*D2+E7)/B14	
15	VA x PQ	=Raíz(B10^2+C10^2+D10^2)			

Figura 137.

- Si deseamos hallar la distancia entre los puntos P(1, 3, 7) y Q(5, -3, 9).
- Se introducen estas coordenadas en las filas 2 y 3.
- Si queremos hallar la distancia de P a la recta determinada por el vector VA(2,1,5,7) y el punto Q, se introducen las coordenadas de P en B2, C2,D2, las de VA en B5,C5,D5 y las de Q en B3,C3,D3.
- Para hallar la distancia del punto P a la ecuación $3x + 7y + z – 14 =0$ se introducen las coordenadas de P en B2, C2, D2 y los coeficientes de la ecuación (3, 7, 1,-14) en B7, C7, D7, E7.

ÁNGULO ENTRE VECTORES

	A	B	C	D	E	F
1	ANGULO ENTRE VECTORES					
2	A	1	0	0	$\lvert A \rvert$	=Raiz(B2^2+C2^2+D2^2)
3	V	1	1	0	$\lvert B \rvert$	=Raiz(B3^2+C3^2+D3^2)
4	Ángulo AB			= Acos(F4/(F2*F3))*180/PI()	A B	=B10*B11+C10*C11+D10*D11

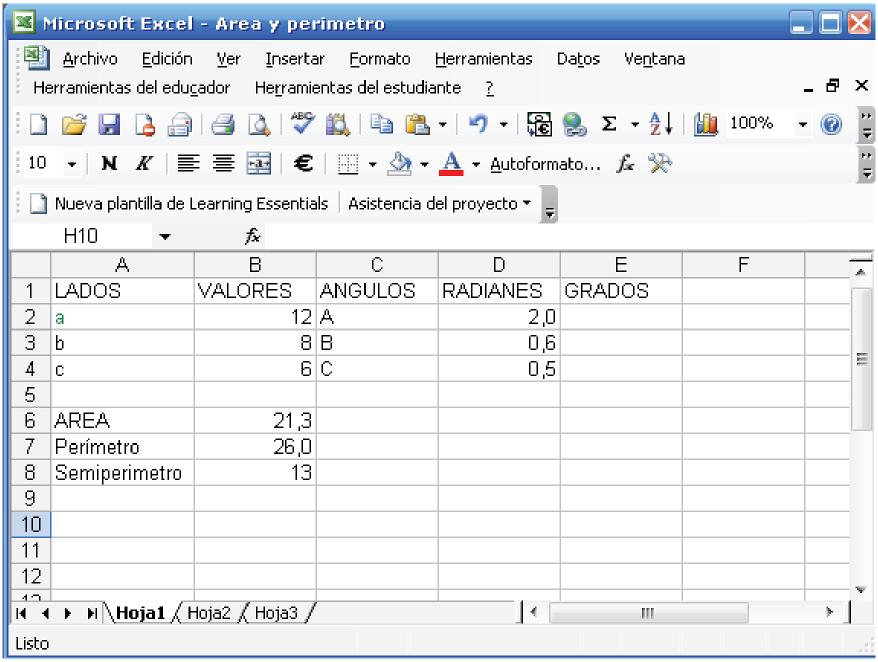
Figura 138.

La función de EXCEL ACOS halla el ángulo cuyo coseno es el producto escalar (F4) dividido por el producto de los módulos (F2*F3). Como el ángulo aparece en radianes añadimos *180/PI() para cambiarlo a grados sexagesimales.

Si vamos hallar el ángulo formado por dos rectas basta considerar sus vectores de dirección.

Cálculo del perímetro, semiperímetro y el área de un triángulo.

La hoja de EXCEL queda de la siguiente manera:



	A	B	C	D	E	F
1	LADOS	VALORES	ANGULOS	RADIANES	GRADOS	
2	a	12	A	2,0		
3	b	8	B	0,6		
4	c	6	C	0,5		
5						
6	AREA	21,3				
7	Perímetro	26,0				
8	Semiperimetro	13				
9						
10						
11						
12						

Figura 139.

En A6 escribimos: =RAIZ(B8*(B8-B2)*(B8-B3)*(B8-B4))

En A7 Escribimos: =B2 + B3 + B4

En A8 Escribimos: =B7/2

Con ello y variando los valores de a, b y c obtenemos diferentes resultados.

MOVIMIENTO PARABÓLICO

Un jugador de baloncesto lanza el balón con una velocidad de $v_0\ m/s$ y forma un ángulo de θ grados con la horizontal. El jugador, con movimiento uniforme, se desplaza en la dirección del balón y lo coge.

a) Calcular la altura en cualquier punto de la trayectoria
b) Calcular la distancia que recorre el jugador.
c) Trazar el gráfico de a) y b).

Solución:

Las ecuaciones a utilizar son: $x = g\ t\ cos\theta$

$$y = \frac{1}{2} \mathrm{g\,t}^2 + v_0 \,\mathrm{sen}\theta\ \mathrm{t}$$

En Excel diseñamos la siguiente hoja de cálculo:

Tiempo	Velocidad	Altura	Distancia
1	8	=(-1/2)*9,8*A5^2+B5*seno(A1*PI()/180)*A1	=9,8*cos(A1*PI()/180)
2	9		
3	10		
4	11		
5	12		
6	13		
7	14		
8	15		

Figura 140.

Luego de introducir estas fórmulas copiamos hacia abajo y obtenemos la distancia y la altura en cualquier punto.

Una muestra del resultado obtenido es el siguiente:

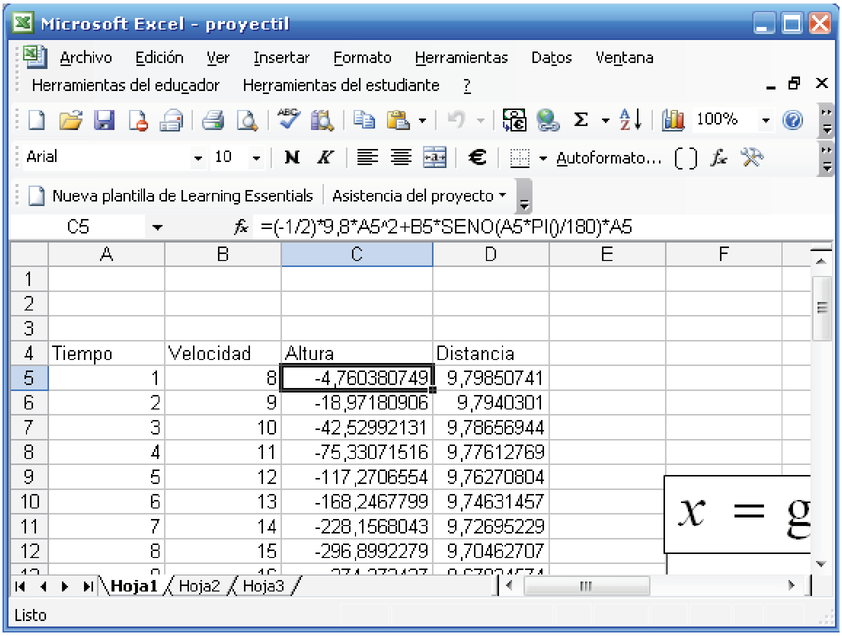


Figura 141.

La gráfica es la siguiente:

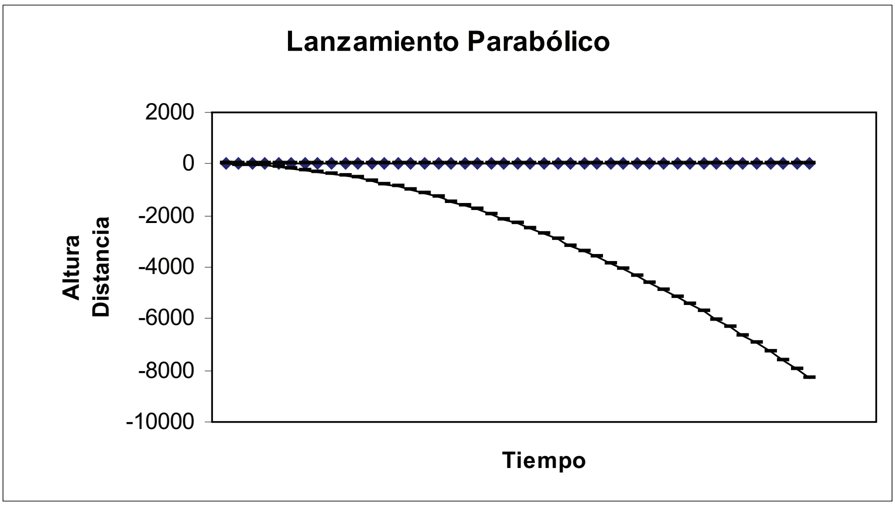
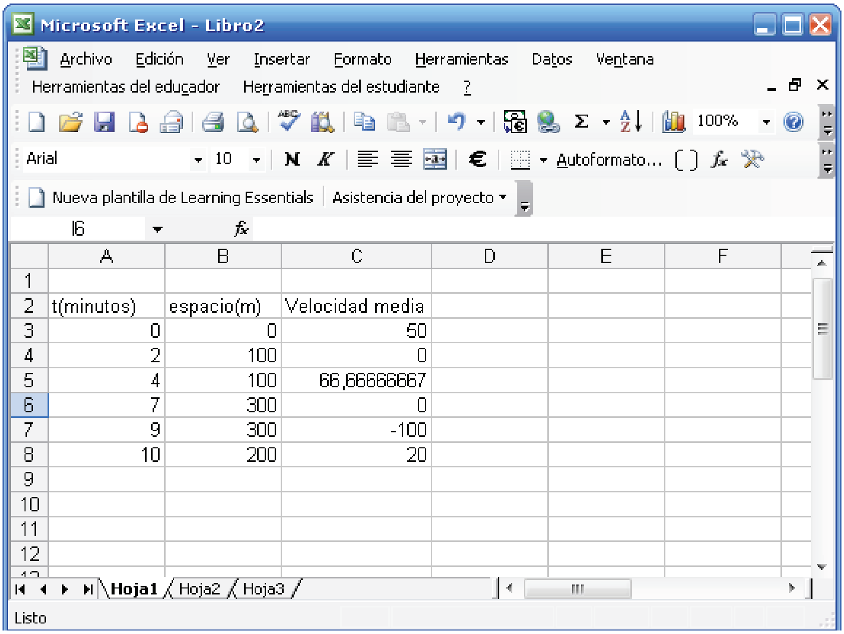


Figura 142.

CÁLCULO DE LA VELOCIDAD MEDIA

Vamos a calcular las velocidades medias de una función definida a trozos. Para ello diseñamos la siguiente hoja:



	A	B	C	D	E	F
1						
2	t(minutos)	espacio(m)	Velocidad media			
3	0	0	50			
4	2	100	0			
5	4	100	66,66666667			
6	7	300	0			
7	9	300	-100			
8	10	200	20			

Figura 143.

En la celda C3 hacemos la siguiente fórmula: = (B4-B3)/(A4-A3) con ella calculamos las velocidades medias en cada intervalo. El gráfico que se obtiene es el siguiente:

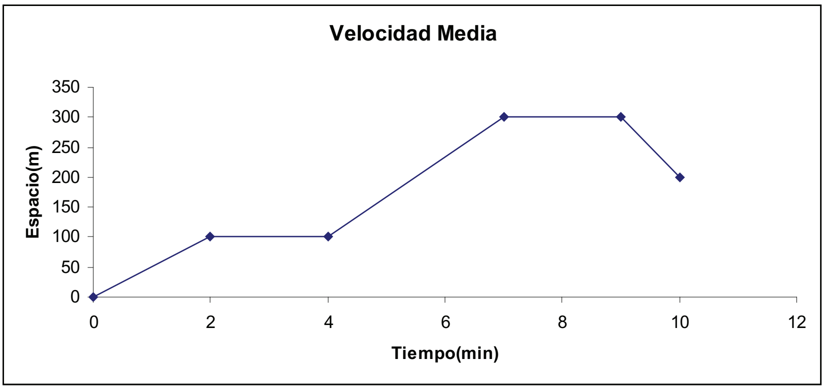


Figura 144.

DINÁMICA

EJEMPLO 38.

Considere el siguiente sistema de bloques

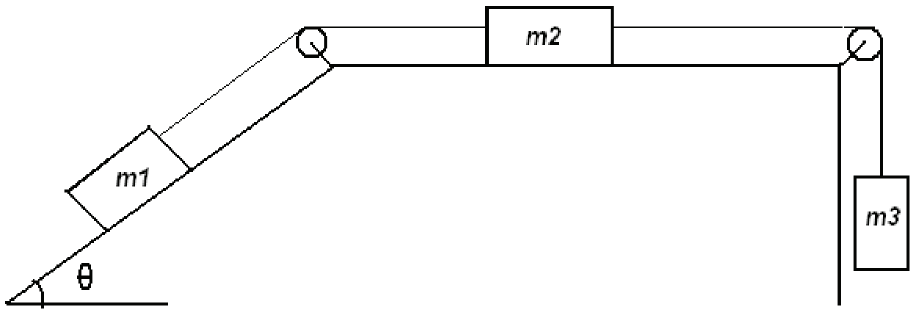


Figura 145.

Hallar la aceleración.

Las ecuaciones que resultan son:

$$T_1 - m_1 g\, sen\theta = m_1\, a$$
$$N_1 - m_1 g \cos\theta = 0$$
$$T_2 - T_1 = m_2 a$$
$$N_2 - m_2 g = 0$$
$$m_3 g - T_2 = m_3\, a$$

Eliminando miembro a miembro las ecuaciones que tienen las tensiones, obtenemos:

$$a = m_3\, g - m_1\, g\, sen\theta = (m_1 + m_2 + m_3)$$

$$a = \frac{m_3\, g - m_1\, g\, sen\theta}{(m_1 + m_2 + m_3)}$$

En Excel construimos la siguiente hoja:

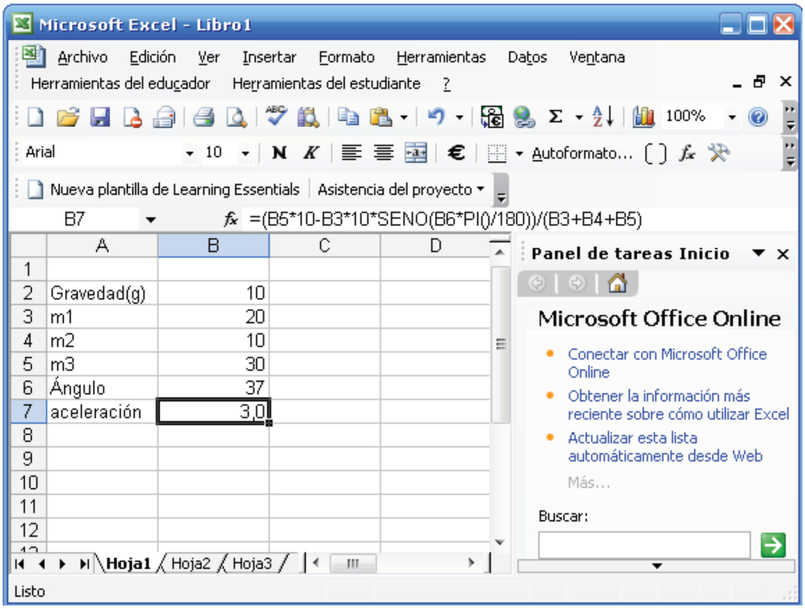


Figura 146.

La fórmula utilizada es:

=(B5*10-B3*10*SENO(B6*PI()/180))/(B3+B4+B5)

Podemos cambiar los parámetros cada vez que se desee.

Compresión de un resorte

Para resolver un problema en el cual se deja caer un objeto sin velocidad inicial y comprime un resorte, lo vamos a hacer para diferentes masas, velocidad y constante. Podemos así, simular una práctica de laboratorio.

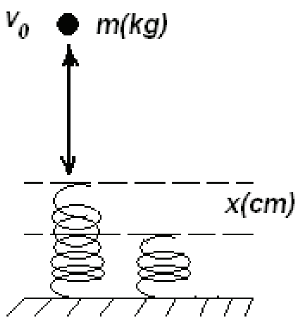


Figura 147.

La hoja de cálculo queda de la siguiente manera:

Masa(kg)	Velocidad(cm/s)	Distancia(cm)	Constante
0,2	5	0,1	250
0,3	10	0,3	300
0,4	15	0,5	350
0,5	20	0,7	400
0,6	25	0,9	450
0,7	30	1,1	500
0,8	35	1,3	550
0,9	40	1,5	600
1	45	1,8	650
1,1	50	2,0	700

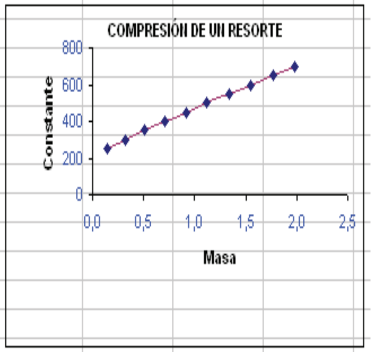


Figura 148.

En D8 escribimos: **=RAIZ (B8*C8^2/E8)** con lo que calculamos la distancia que se comprime el resorte.

Con Excel podemos realizar cualquier otra simulación para física.

Taller de ejercicios

Para cada caso elabore una hoja en EXCEL.

1. Trace el gráfico de las siguientes funciones:

$$a)\ y = 3x - 4$$
$$b)\ y = \cos(2x)$$
$$c)\ y = 3x^2 + 5x - 4$$
$$d)\ y = sen(3x)$$
$$e)\ y = 4x + 1$$

2. Hallar el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de:
   a) 72 y 52 b) 32 y 16 c) 60 y 42.

3. Resulta los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a)\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 20 \\ 4x + 2y - 3z = 11 \\ 3x + 4y + 2z = 53 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 9x - 2y + 12z = 20 \\ 6x + 4y - 3z = 3 \\ 3x + 2y - 3z = -1 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} u + x + y = 6 \\ x + y + z = 7 \\ y + z + u = 8 \\ z + u + x = 9 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} x^2 - y^2 = 64 \\ xy = 255 \end{cases} \quad e)\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 7 \\ x - y \quad = 91 \end{cases} \quad f)\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$$

4. Realizar las siguientes operaciones entre matrices:

$$a)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 25 & 121 \\ 234 & 345 & 22 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 557 & 23 & 25 \\ 213 & 100 & 47 \\ 56 & 77 & 777 \end{bmatrix}$$

$$b)\begin{bmatrix} -67 & 34 & 25 \\ 321 & 54 & 34 \\ -76 & -78 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 878 & 978 & 123 \\ 321 & 456 & 35 \\ -675 & 765 & 456 \end{bmatrix}$$

$$c)\begin{bmatrix} 1 & 23 & 121 & -345 & 12 \\ 342 & 421 & 217 & 123 & -189 \\ 321 & -765 & 897 & 456 & 123 \\ 453 & 76 & 77 & 55 & 56 \\ 45 & 213 & 45 & 56 & 89 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 43 & 241 & 7121 & -345 & 12 \\ 3442 & 621 & 717 & 7823 & -3189 \\ 621 & -235 & 597 & 156 & 823 \\ 953 & 86 & 197 & 65 & 96 \\ 745 & 713 & 945 & 86 & 789 \end{bmatrix}$$

$$d)\begin{bmatrix} 1 & 23 & 121 & -345 & 12 \\ 342 & 421 & 217 & 123 & -189 \\ 321 & -765 & 897 & 456 & 123 \\ 453 & 76 & 77 & 55 & 56 \\ 45 & 213 & 45 & 56 & 89 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 43 & 241 & 7121 & -345 & 12 \\ 3442 & 621 & 717 & 7823 & -3189 \\ 621 & -235 & 597 & 156 & 823 \\ 953 & 86 & 197 & 65 & 96 \\ 745 & 713 & 945 & 86 & 789 \end{bmatrix}$$

5. Calcular los determinantes:

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 14 & 76 & 21 \\ 19 & 41 & 77 & 17 \\ 11 & 23 & 23 & 27 \\ 54 & -7 & 9 & 10 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 19 & 23 & 127 & 55 \\ 28 & 27 & 12 & 16 & 89 \\ 24 & 15 & 9 & 3 & -14 \\ 3 & 89 & 76 & 34 & 13 \\ 54 & 34 & 21 & 22 & 31 \end{vmatrix}$$

6. Para la siguiente función, observar que ocurre cuando x está cerca de 3:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3}$$

7. Para la función $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 7x - 2$

a) Trazar el gráfico
b) Trazar el grafico de la recta tangente

8. Para los siguientes datos:

39	35	36	96	87	74	89	80
43	48	43	83	76	91	82	83
56	53	72	56	74	93	93	45
63	55	55	65	65	65	66	59
38	62	86	88	36	36	76	62

a) Construir una tablado de frecuencias.
b) Construir un histograma y un polígono de frecuencias.
c) Trazar el gráfico de las ojivas mayor que y menor que.
d) Calcular la media, mediana, moda y la desviación estándar.

9. Calcule las otras partes del triángulo ABC:

$a)\ \beta = 25.6°,\ \gamma = 34.7°,\ b = 184.8$

$b)\ \alpha = 6.24,\ \beta = 14.08°,\ a = 4{,}56$

$c)\ \gamma = 47{,}74,\ a = 132\ c = 40$

$\alpha = 41°,\ \gamma = 77°,\ a = 10$

$\beta = 20°,\ \gamma = 31°,\ b = 210$

10. Resuelva las siguientes ecuaciones

$a)\ 3x + 4 = 6$

$b)\ 7x - 4 = 8$

$c)\ x^2 + 2x - 3 = 0$

$d)\ 2x^2 - 5x - 12 = 0$

$e)\ 5x^2 + 34x - 7 = 0$

11. Un futbolista lanza una pelota con una velocidad de 10m/s con una dirección de 37° con la horizontal. Encontrándose a 8m de distancia de una portería de 2,5 m de altura, ¿Cuál es la posibilidad de gol?

12. En la figura, los cuerpos A y B pesan cada uno 50kg-f y se mueven a una velocidad constante. El coeficiente de rozamiento es 0,2 para los dos cuerpos. ¿Cuál es el peso del cuerpo C?

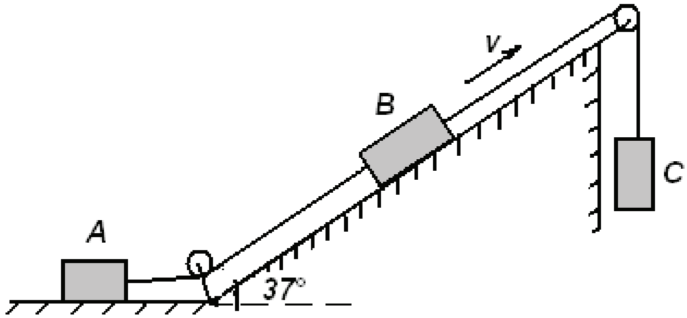


Figura 149.

13. Un bloque de masa de 3kg parte de una altura de 7m con velocidad inicial horizontal de 5m/s, como muestra la figura y comprime una distancia de 1m. ¿Cuál es la constante del resorte?

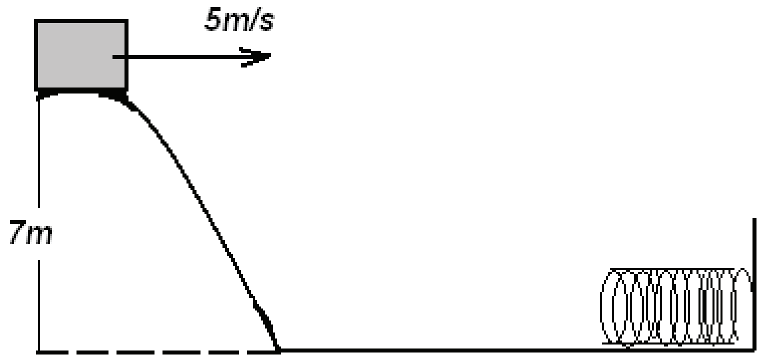


Figura 150.

14. Hallar la distancia entre los puntos y las rectas dadas.
   a) (3,−1,7) d) (7, 8, 5) y (4, 9, 12)
   b) (6,5,9) e) (7, 8, 9) y la recta $5x + 10y - z = 25$
   c) 3x + 2y + 3z = 12 y el punto (4,7,10)

BIBLIOGRAFÍA

1. CRISTOFOLI, María Elizabeth. *Estadística con Excel*. Editorial Ediciones Maurina

2. DIAZ, M. Kazmier, *Estadística Aplicada*. Segunda Edición. Editorial Mc Graw Hill.

3. LERMA, Héctor Daniel. *Gráficas y tablas estadísticas con Excel*. Primera edición, ECOE Ediciones, Bogotá, 2007

4. MASON, Robert D y Lind. *Estadística para administración y economía.* Editorial Alfa y Omega. 1995

5. MENDENHALL, William. *Introducción a la probabilidad y la estadística*. Quinta Edición. Editorial Uadswordth Internacional Iberoamérica, 1997.

6. MOOD, Graybill. *Introducción a la teoría de la Estadística*. Editorial Aguilar. 1970.

7. PEREZ LÓPEZ, César. *Estadística aplicada a través de Excel*. Pearson Educación S.A.

8. PORTUS, Lincon, *Curso práctico de estadística*. Editorial Mc Graw Hill.

9. SPIEGEL, Murria R. primera edición. *Estadística*. Editorial Mc Graw Hill.

10. WALPOLE, Ronald E. *Probabilidad y Estadística para Ingenieros*. Editorial Prentice Hall, sexta edición.

WEBGRAFÍA

www.aulafácil.com

http://www.sectormatematica.cl/excel.htm

http://homepage.cem.itesm.mx/lgomez/excel/matematicas.htm

http://web.educastur.princast.es/ies/elpiles/ARCHIVOS/paginas/depar/matematicas/matem%C3%A1ticas_con_excel.htm

http://www.monografias.com/trabajos16/funciones-matematicas/funciones-matematicas.shtml.

Otros textos de interés

- Álgebra lineal y programación lineal, **Francisco Soler Fajardo**
- Algoritmos, estructura de datos y programación orientada a objetos, **Roberto Flórez Rueda**
- Cómo elaborar trabajos de grado, **Mireya Cisneros**
- Cómo leer mejor, **Alberto Aristizábal**
- Estadística básica aplicada, **Ciro Martínez B.**
- Estadística y muestreo, **Ciro Martínez B.**
- *Excel, aplicaciones en álgebra, estadística, probabilidad y física,* **José Gerardo Cardona, Luz María Rojas y Fernando Mesa**
- Fundamentos de cálculo, **Francisco Soler**
- Fundamentos de estadística, **Mireya Ardila**
- Gráficas y tablas estadísticas en excel, **Héctor Daniel Lerma**
- Lógica de programación, **Efraín Oviedo Regino**
- Matemáticas financieras aplicadas, **Jhonny de Jesús Mesa**
- Matemáticas financieras empresariales, **Juan Flórez Uribe**
- Metodología de la investigación, **Héctor Daniel Lerma**
- Modelos financieros con Excel, **Jairo Gutiérrez Carmona**
- Openoffice.org2.x, **Carlos Hernán González y Henry Antonio Saltarén**
- Pedagogía, enseñar a pensar?, **José Iván Bedoya**
- Presentación de informes, **Héctor Daniel Lerma**
- Solucionario de Baldor, **Henry Sánchez Pardo**

EXCEL
aplicaciones en álgebra, estadística, probabilidad y física

FOTOCOPIAR UN LIBRO ¡ES PIRATEARLO!
SEA ORIGINAL NO FOTOCOPIE

Aborda una serie de problemas sencillos y de rutina de matemáticas, estadística, probabilidad y física, los cuales el usuario podrá resolver mediante las bondades de la hoja de cálculo EXCEL, la cual usará como medio de prueba para procedimientos manuales.

El objetivo no es enseñar a programar, es manejar sus aplicaciones en diferentes problemas. Los temas se presentan así:

En el capítulo 1. se presentan ejemplos con matemáticas, álgebra, trigonometría y cálculo y en el capítulo 2. tópicos de estadística y unas pequeñas pruebas de geometría y física de gran utilidad en el laboratorio de física.

Colección: Educación y pedagogía
Área: Educación

ECOE
EDICIONES

978-958-648-568-5

9 789586 485685